量子力学の誕生，変遷，成果

古典物理

電磁気学

Maxwell理論

場の概念

[電子場，電磁場]

Lohrentzの電子論

熱力学

Boltzmanの原理

Boltzman方程式

エントロピーの概念

[統計熱力学]

古典力学

Newton力学

[解析力学]

特殊相対性理論

一般相対性理論

光学

幾何光学

波動光学

粒子(質点，剛体）の物理

場の物理

古典力学

[解析力学]

Hamiltonの原理

Lagrangeの運動方程式

Euler-Lagrangeの方程式

Hamiltonの正準運動方程式

Hamilton-Jacobiの運動方程式

熱力学

[統計熱力学]

輻射(電磁波）

熱伝導（自由電子の運動，格子振動）

熱伝達（輻射と電子・格子の相互作用）

量子力学成立を促した実験事実

電子

[粒子性]
油滴（Milikan）
霧箱（Wilson）
陰極線（J.J.Thomson）

[波動性]
ラムザウアー効果
電子線の干渉性（Davison, Germer, G.P.Thomson）

[スピン]
電子スピンと磁場（Zeeman）
電子スピンと電場（Stern, Gerlach）

光

[粒子性]
輻射の量子化（Planck）
光量子仮説（光電効果，Einstein）
コンプトン効果

原子

[原子構造]
光の共鳴吸収（Frank, Herz）
スペクトルと原子量（Mouseley）
原子とα線衝突（Rutherford）
原子スペクトル（Ritz）

量子力学の発展

（相対論的）量子力学，場の量子論，量子電磁気学

ディラックの方程式

（非相対論的）量子力学

[2大原理]

ハイゼンベルグの不確定性原理（正準な交換関係）

パウリの排他律

[諸運動方程式]

シュレディンガーの運動方程式

ハイゼンベルグの運動方程式

ファインマンの経路積分

量子力学の成果(その1)

電気電子工学

誘電率
透磁率
電気伝導度
量子ドット
ジョセフソン素子
超伝導利用蓄電
超伝導利用送電

機械工学

物質強度の予測
レーザー加工
0次元金属
量子流体
弾性係数
膨張率
比熱

センサ，計測工学

原子時計
電子分光分析
X線分光分析
電圧，抵抗の標準
近接光顕微鏡
原子間力顕微鏡
走査トンネル顕微鏡

半導体工学

トランジスター
ダイオード

物性論

半導体
超伝導
巨大磁気抵抗
量子ホール効果

情報工学

量子コンピュータ
単一電子メモリ

量子光学

レーザー
光ピンセット
自由電子レーザー

量子力学の成果（その2）

素粒子論

天体物理学

宇宙創生（ビッグバン）
ブラックホールの蒸発
赤方偏移

量子化学
（触媒工業，染料工業）

染料発色メカニズム
触媒作用

量子脳力学

記憶のメカニズム
神経の伝達メカニズム

量子生物学
（酵素工業，バイオ工業）

酵素作用
DNAの構造解明
発ガンのメカニズム
CO中毒のメカニズム

哲学

非決定論
二元論

医用工学

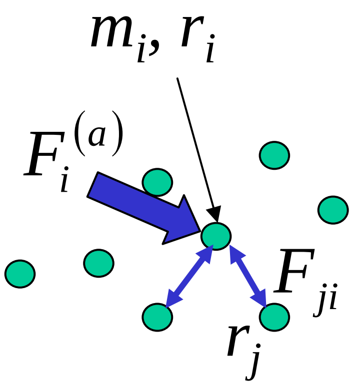
SQUID
NMR

古典力学定式化の流れ

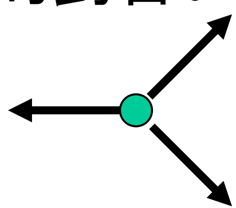
古典力学の種々の定式化 ⟷ 物理現象の概念の把握の助け

ニュートンの運動方程式

宇宙における普遍的な力学



作用・反作用
（静的釣合い）

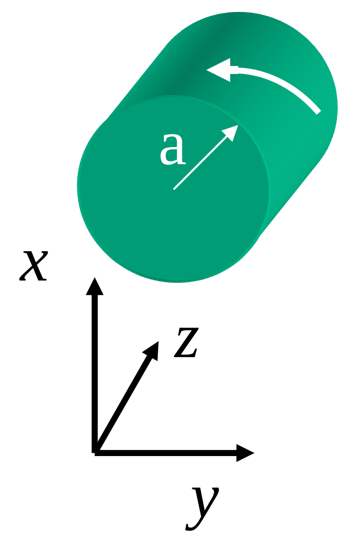


$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{i} = \mathbf{F}_i^{(a)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji}$$

①加速度，慣性質量の定義
②運動量保存則
③作用，反作用の法則

一般化座標

☆ 円柱面に束縛された運動



$x-y-z$ 座標系 $\theta - z$ 座標系

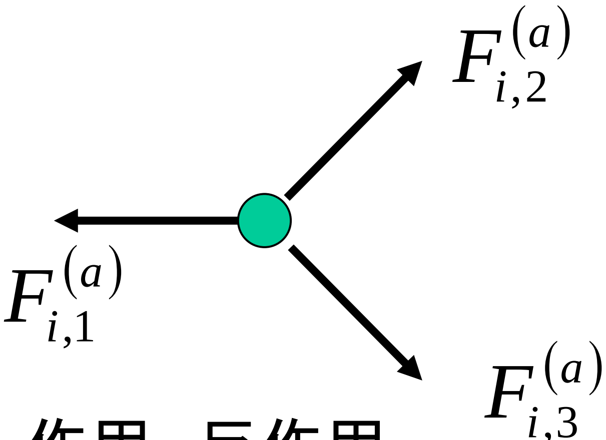
３変数 x, y, z
１拘束条件 $x^2 + y^2 = a^2$ → ２変数 θ, z

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$$

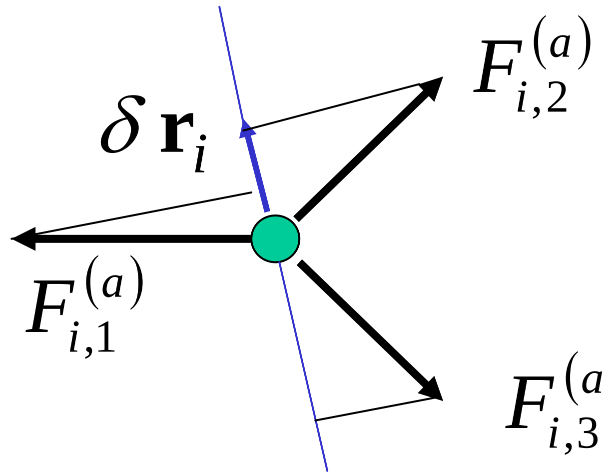
仮想仕事の原理(静的釣合い)

ベクトル
（力）

スカラー
（仕事，エネルギー）



作用，反作用



力(ベクトル)

仮想変位
（ベクトル）

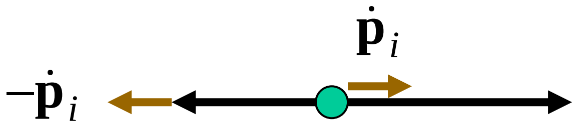
$$\underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i}_{\text{仮想仕事(スカラー)}} = 0$$

静的釣合　＝　エネルギー最小

$$dW = 0$$

ダランベールの原理

①動的釣合い
加速度項を
力とみなす



仮想仕事の原理
を適用

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i\right) \cdot \delta\,\mathbf{r}_i = 0$$

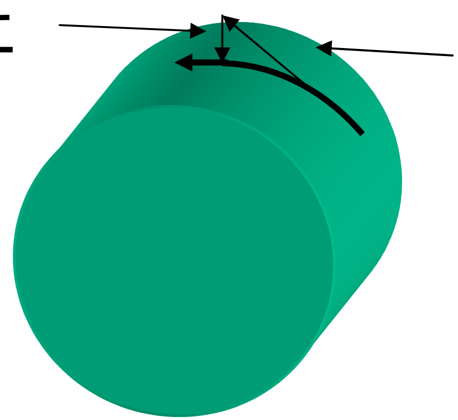
②一般化座標

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

$\dfrac{\partial T}{\partial q_j} \neq 0$ の例　☆ 円柱面に束縛された運動　$T = \dfrac{m}{2}\left(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$

円柱面に束縛するに
要する力

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = -mr\dot{\theta}^2$$

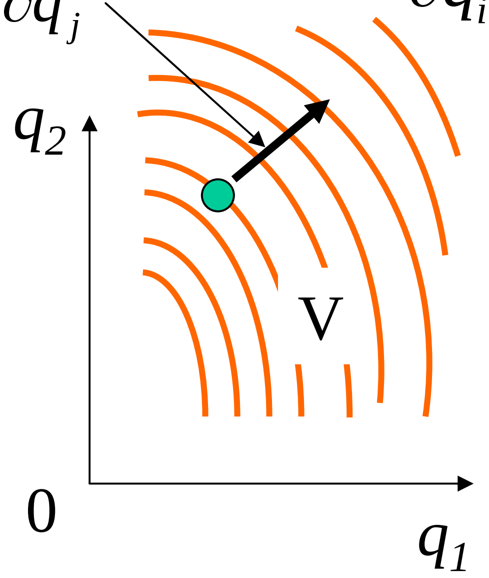


加速度に
関連した項

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = m\ddot{z} \end{cases}$$

ラグランジュ方程式

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$$



ダランベールの原理

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

力をポテンシャル場

⇩

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

← 見通しのいい式

∵ 関数 L 1つのみ

変数 $q, \dot{q}, t$

$L = T - V$ ：ラグランジアン

☆ $dT/dq = 0$ の場合 $\quad \dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q}$ ← 周知の式

ハミルトンの原理(変分原理)

ラグランジュ方程式の積分形

$$\boxed{\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1 \cdots q_n, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n)dt = 0}$$

$I = \int_{t_1}^{t_2} Ldt$:作用または作用積分

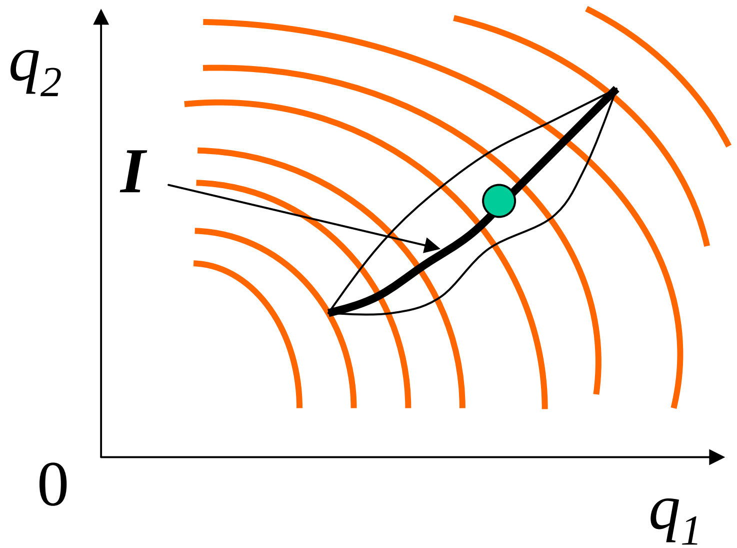
利点

①エレガント

②不変量のみを含む

③場の性質を記述できる

∵ 力が陽に含まれない

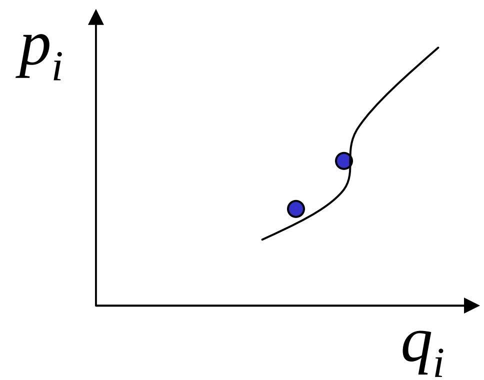


$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right]}_{} \cdot \delta q_j dt = 0$$

＝0: ラグランジュ方程式

ハミルトンの正準方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$



一般化運動量
（共役運動量，正準運動量）: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

正準変数: (q, p)

Legendre変換: $H(p, q, t) = \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$

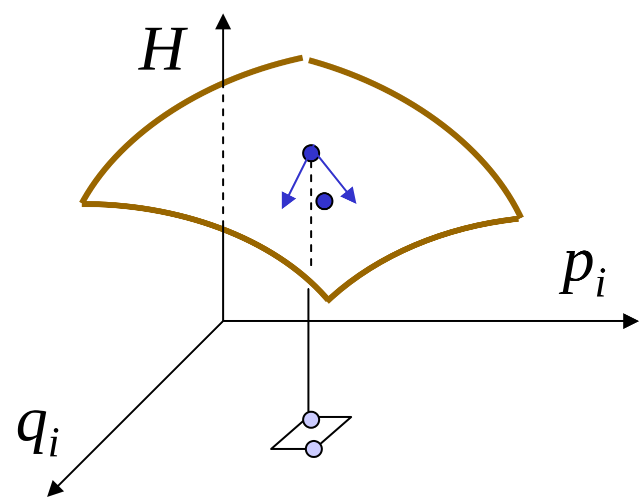
利点

①力学構造に対する深い見通しを与える

②力学の物理的内容を抽象的な形で記述

③物性論で本質的役割

④量子力学，統計力学の出発点



☆　サイクリック(cyclic)な座標:　L に含まれない座標 q_j

“サイクリックな座標に共役な一般化運動量は保存される”

＝　電磁力が保存される場合に対しても保存則が得られる

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dp_j}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad p_j = const.$$

サイクリックな座標の数　＝　一般化座標のとり方によって変わる

（例）

中心力の問題:　x, y はサイクリックでない　⇔　θはサイクリック

一組の変数からもっと適切な変数の組へ変換する方法

☆　正準変換(canonical transformation)

正準変数から正準変数への変換

（位相空間(phase space)での変換）

ポアソン(Poisson)の括弧式

$$[u, v]_{q,p} = \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}$$

ポアソンの括弧式:　正準不変量　$[u, v]_{q,p} = [u, v]_{Q,P}$

☆　古典力学から量子力学へ移行する場合に特に有用

古典的ポアソン括弧式 $\Longleftrightarrow$ 対応する量子論的演算子の交換子

Lie 代数(Lie algebra) : 結合法則に従わない特殊な形の代数

ベクトル積　$_{\mathrm{V}}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \to \mathbf{A} \times \mathbf{B}$

行列の交換子　$_{\mathrm{M}}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \to \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$

ポアソンの括弧式を用いた運動方程式

ハミルトニアン力学の枠組 $\Longleftrightarrow$ ポアソンの括弧式を用いて表現

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Hamilton-Jacobi の理論

正準変換：力学的問題を解くための一般的な手順　→　２方法

① すべてサイクリックな新しい正準座標へ変換
② $(q, p)_t$ を定数の組（例えば，(q_0, p_0)）へ正準変換

Hamilton-Jacobi の方程式

Hamilton の主関数 S ：　$F = F(q, P, t)$ の解

Hamilton-Jacobi の方程式

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i \, , \frac{\partial S}{\partial q_i} ; t \right) = 0}$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

特殊相対性理論

量子力学　＝　電子と光の力学

⇨ Maxwell 電磁気学

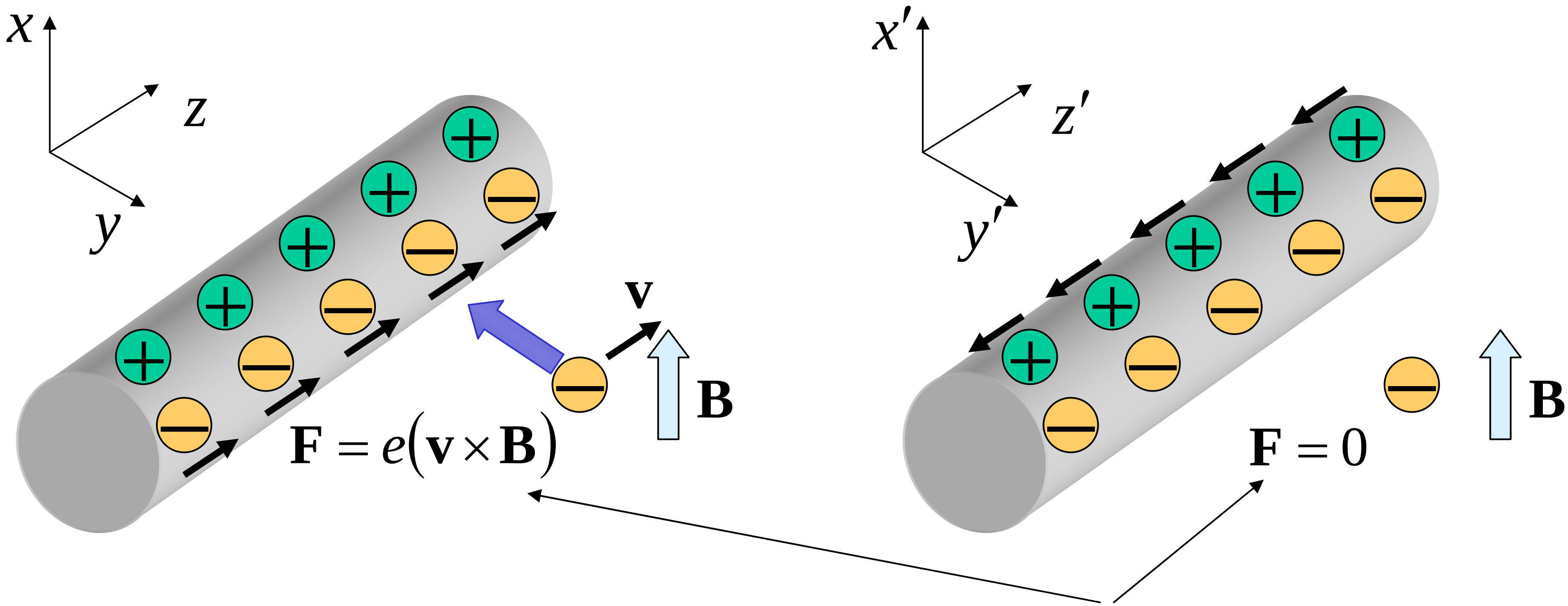
⇨　特殊相対性理論

平行移動する電子間に作用する力

ローレンツ力 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

☆ ガリレイ変換 $x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - vt, \quad t' = t$

ワイヤに固定した座標系 S　　　電子に固定した座標系 S’

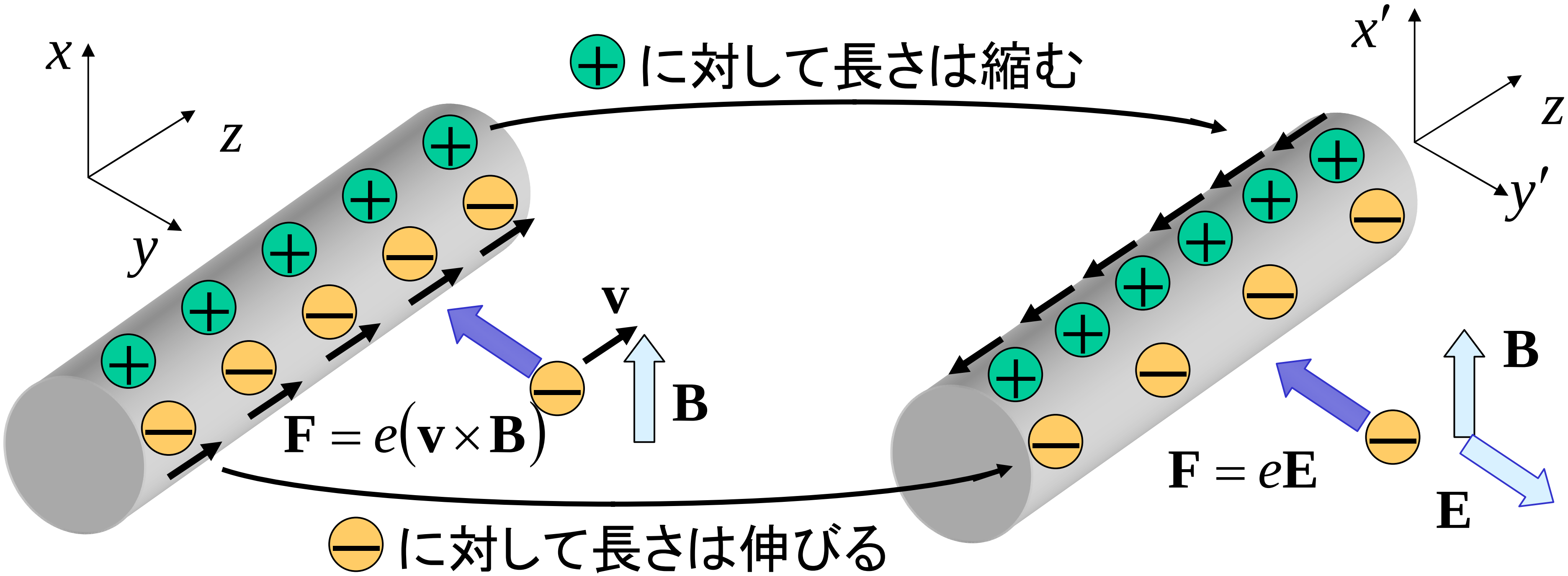


1つの物理現象に対して座標系を変更 → 解が異なる ？

☆ ローレンツ変換 $x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \dfrac{z - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \dfrac{t - vz/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

ローレンツ収縮 $L' = L\sqrt{1 - v^2/c^2}$

ワイヤに固定した座標系 S 電子に固定した座標系 S'



$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

☆ 座標系 S における力

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{2qIv}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_- A}{r}\frac{v^2}{c^2}$$

A: 金属線断面積

☆ 座標系 S’ における力

座標系 S で金属線が中性　$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \rho_-\sqrt{1-v^2/c^2} = \rho_+\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$F' = qE' = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_+ A}{r}\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$\Delta p'_y = F'\Delta t' = F\Delta t = \Delta p_y$$

ラプラシアン，ダランベルシアン

☆ 熱伝導，流体の場

ラプラシアン $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ガリレイ変換に対して $$\Delta = \Delta'$$

☆ 電磁場

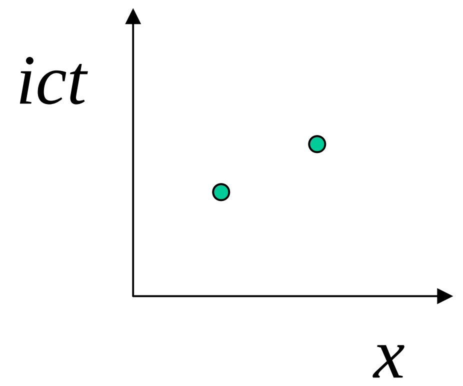
ダランベルシアン $$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

ローレンツ変換に対して $$\Box = \Box'$$

注： ガリレイ変換に対して

$$\Box = \Box' + \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'\partial z'} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

相対論的力学（4次元時空）



4次元座標　$\vec{\mathbf{x}} = (ict, x_1, x_2, x_3)$

4次元運動量　$\vec{\mathbf{p}} = (i\,E/c\,, p_1, p_2, p_3)$

$$= (imc, mv_1, mv_2, mv_3)$$

運動質量　$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad m_0 :$ 静止質量

$$E^2 = m^2c^4 - c^2\left(m^2v^2 - p^2\right) = m^2c^4\left(1-v^2/c^2\right) + c^2p^2 = c^2\left(m_0^2c^2 + p^2\right)$$

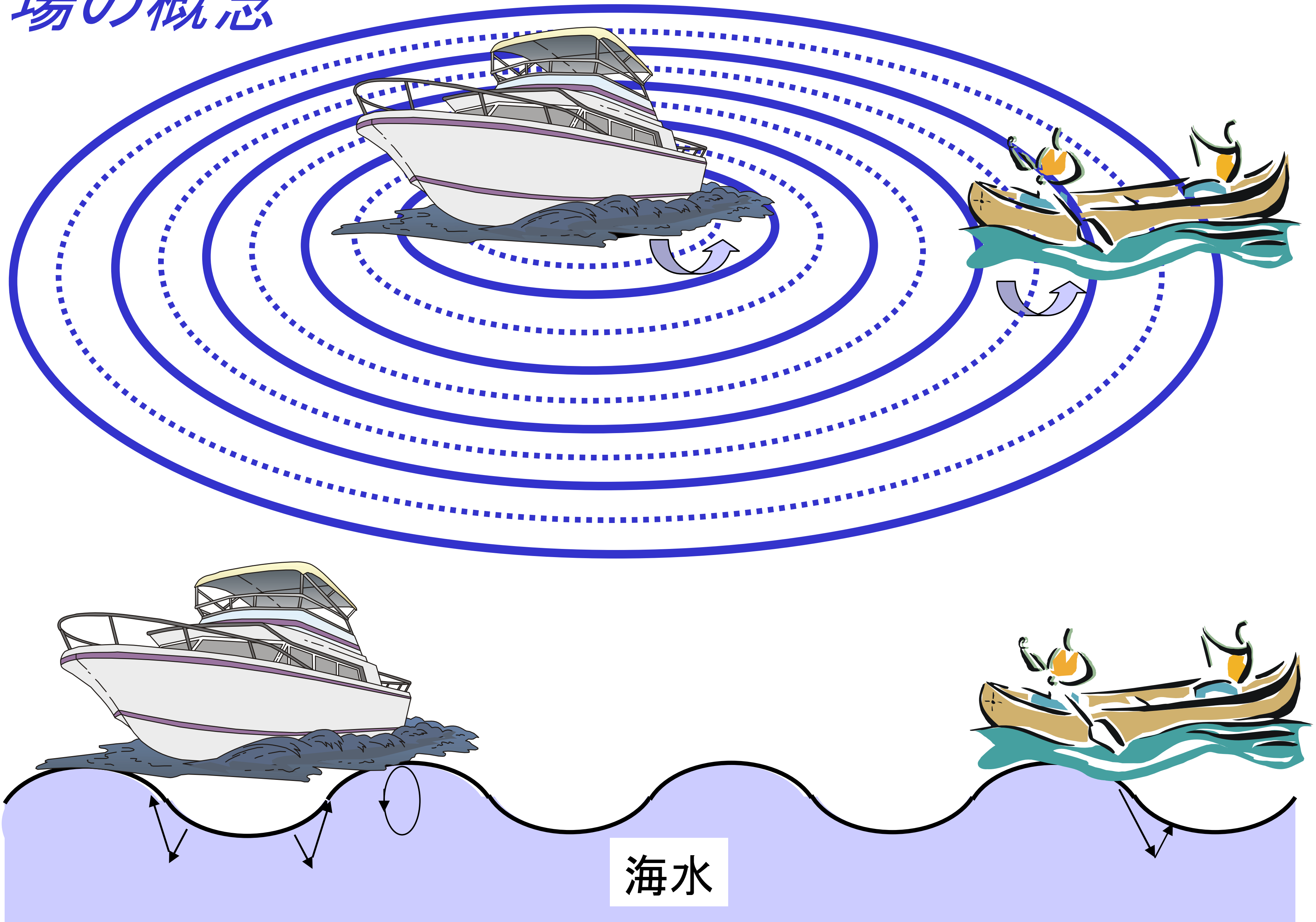
$$\therefore \quad E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$$

または　$E = mc^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0c^2 + \dfrac{1}{2}m_0v^2 + O\left(\dfrac{v^4}{c^2}\right)$

固有時（運動物体とともに動く座標系での時刻）

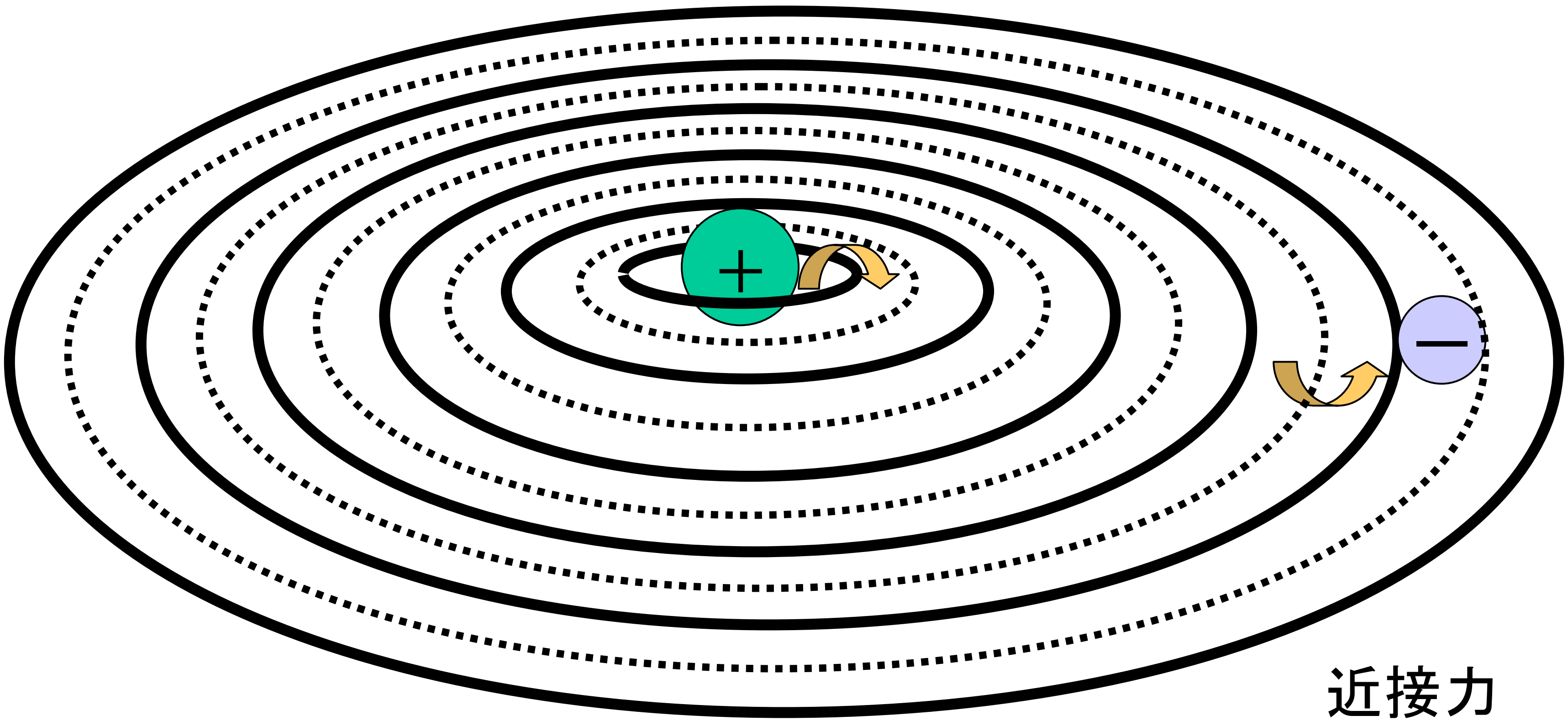
$$d\tau = \sqrt{1-v^2/c^2}\cdot dt$$

場の概念



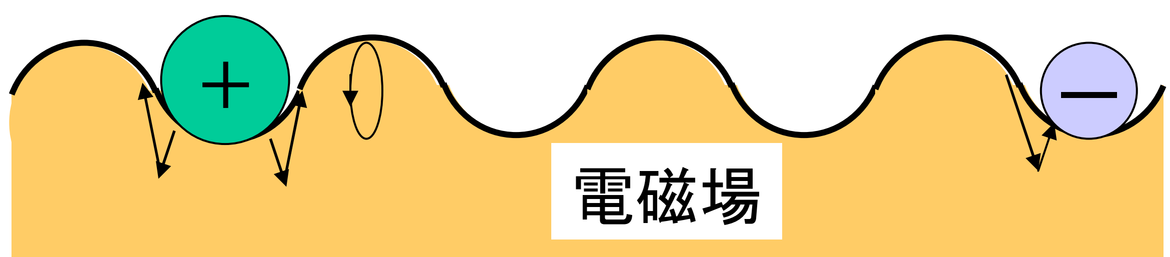
（注）

場の概念

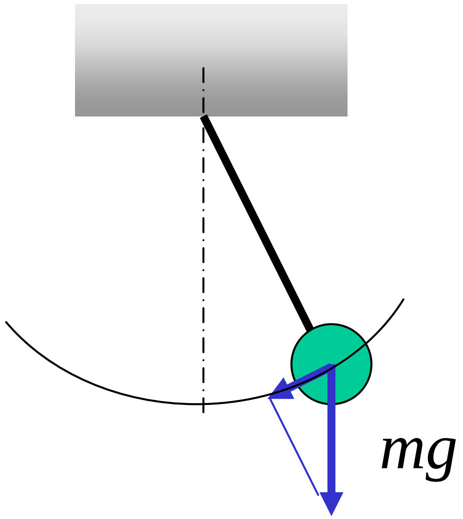


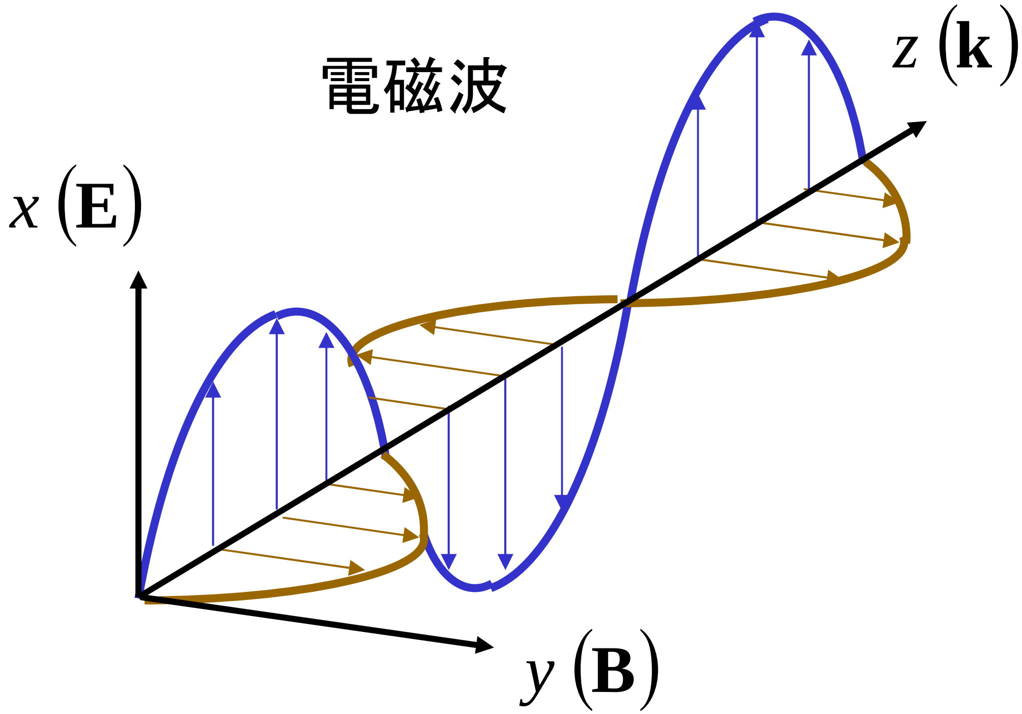
近接力

場の媒体



振動:　復元力の存在





$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \to \quad \mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mathrm{rot}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\to \quad \boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}}$$

量子像の観測

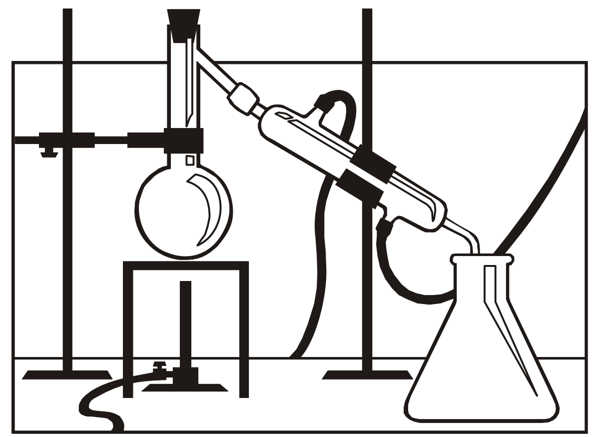
科学，工学における研究

経験 → 対象の十分な把握 → 予測

研究者の意識

客観的研究
はありえない！

予測に決定的に左右される



観察 → 結果

比較，対照

予測

知性で検討，評価

“量子の世界の議論”

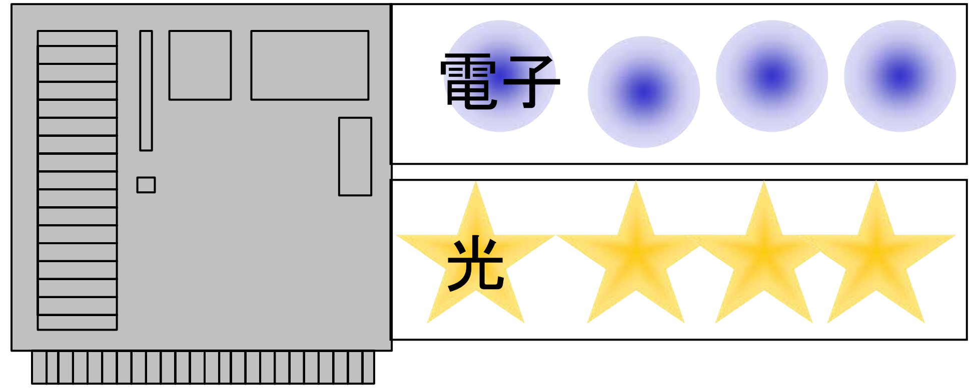
- 言葉のもつ困難さ，曖昧さ
- 考え，意見を表現する手段の制約

言葉の
意味，ニュアンス

個人の経験で相違

☆ 一般的な計測

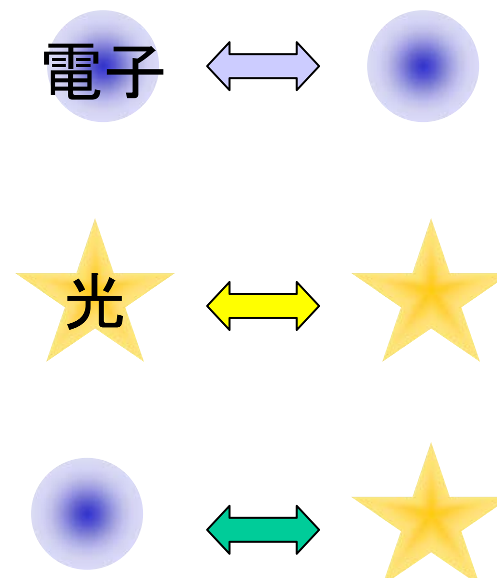
計測対象より電子，光の量，エネルギーを情報として取出す．

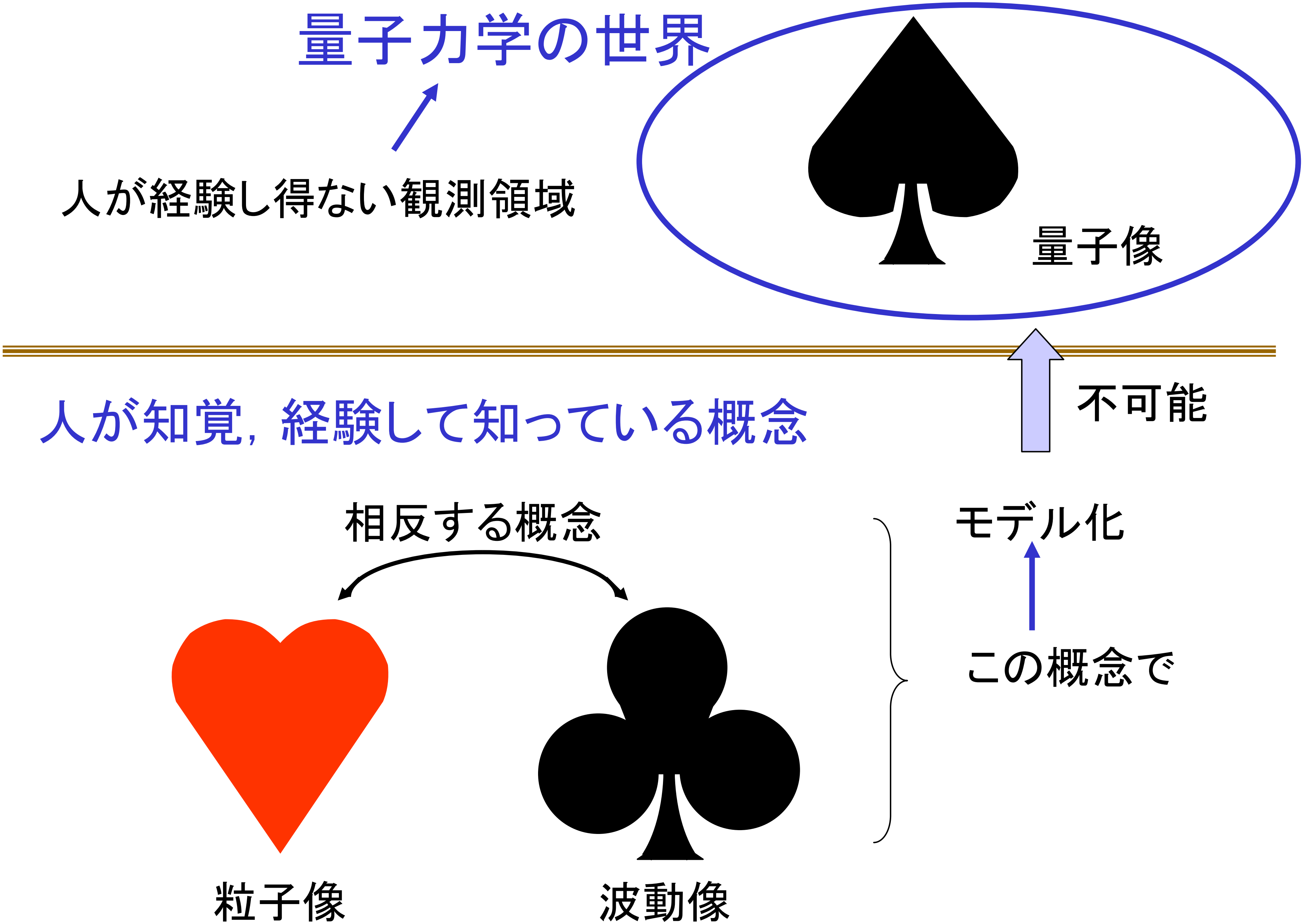


☆ 量子力学

観測者の主観

対象自身 ＝ 電子，光



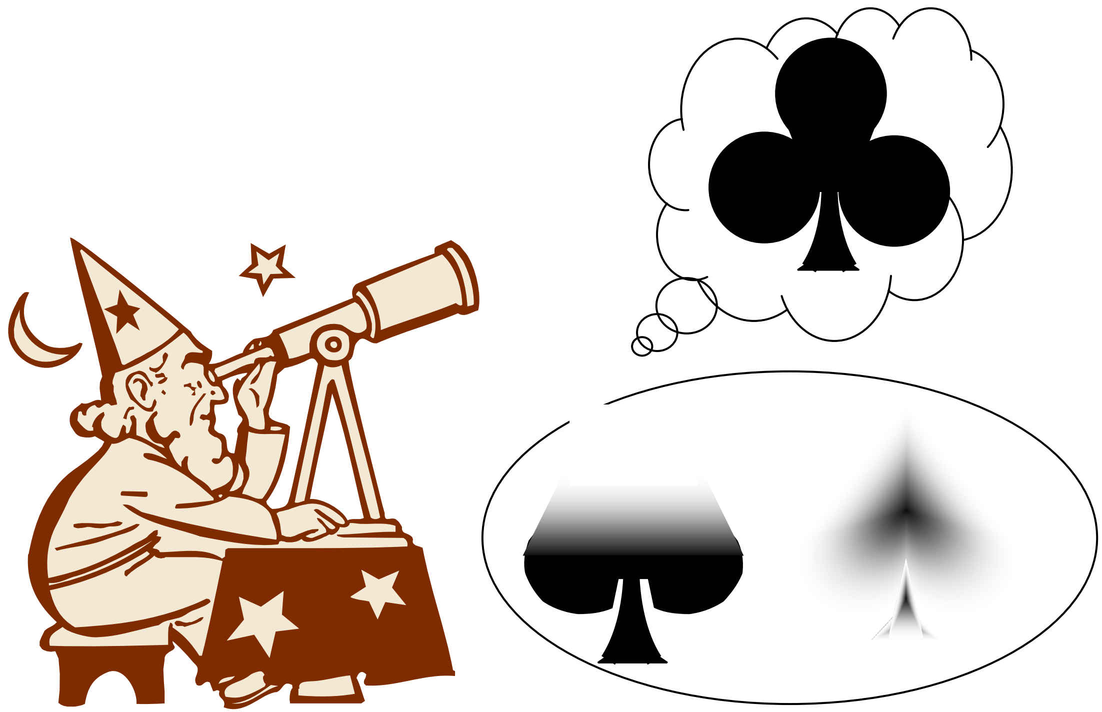

量子力学の世界
人が経験し得ない観測領域
量子像
不可能
人が知覚，経験して知っている概念
相反する概念
モデル化
この概念で
粒子像
波動像

[観測]　観測者が問題設定 ⟶ Yes, No の答を得る

（観測１）

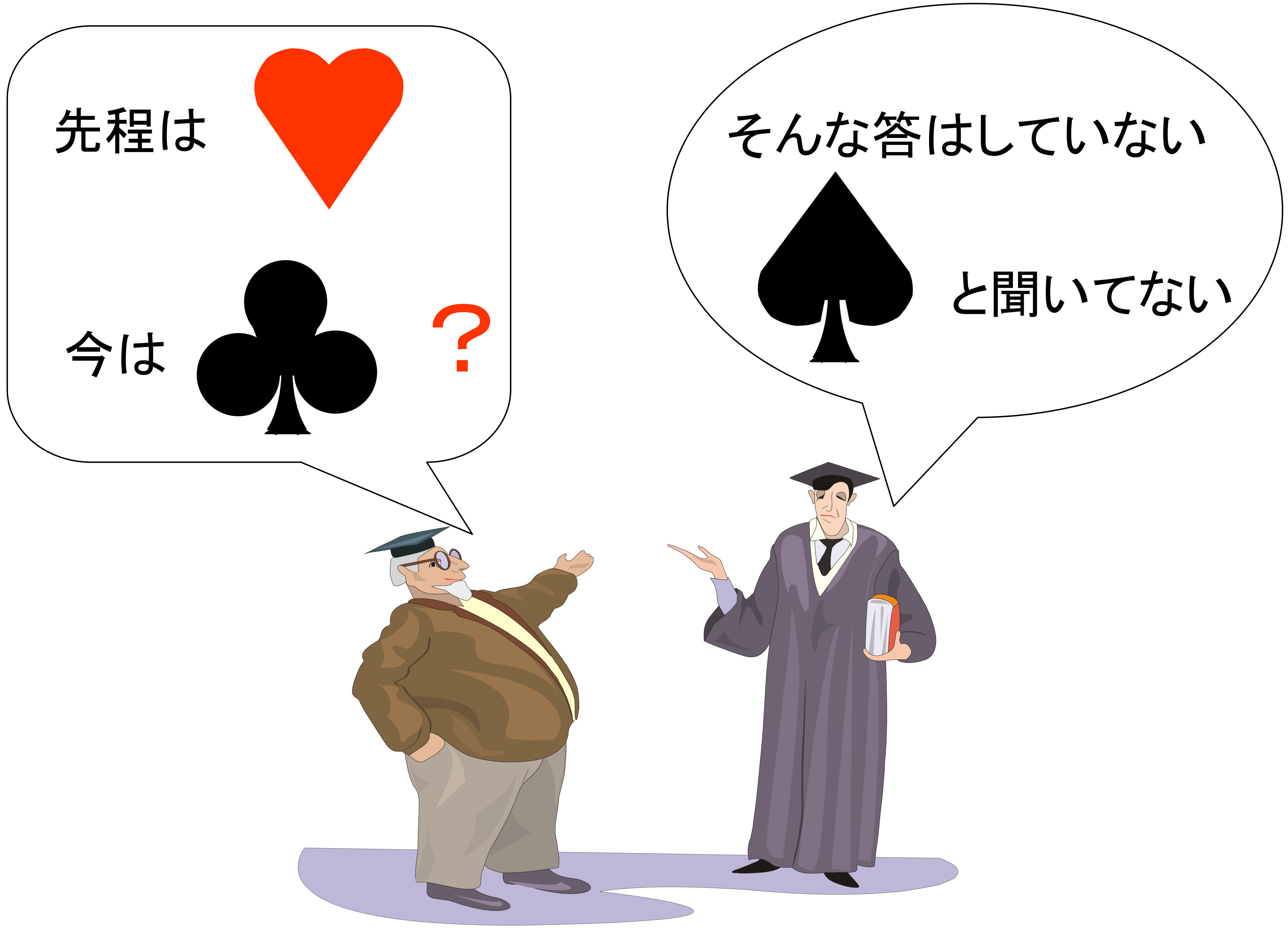
上下の一方に尖り，他方の
２箇所に丸みがあるか　？

→ Yes



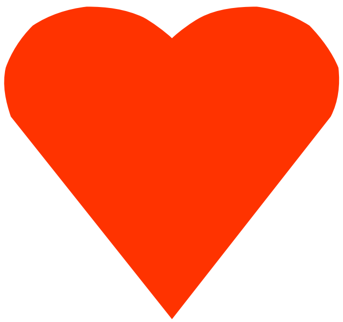
（観測２）

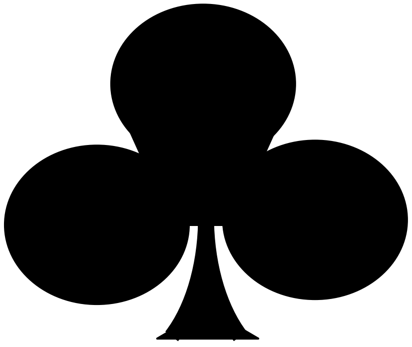
足があるか？ → Yes　　黒いか　？ → Yes

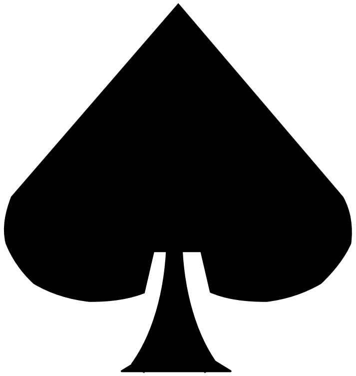

先程は
今は
?
そんな答はしていない
と聞いてない

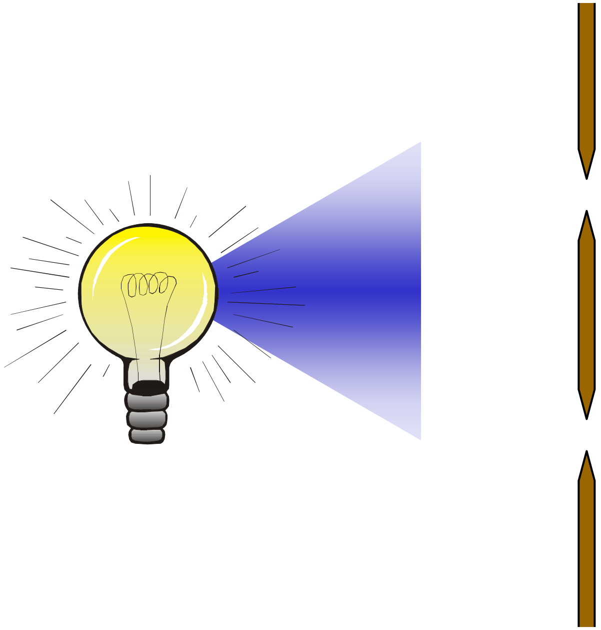
2スリットの通過

粒子　　波動　　量子

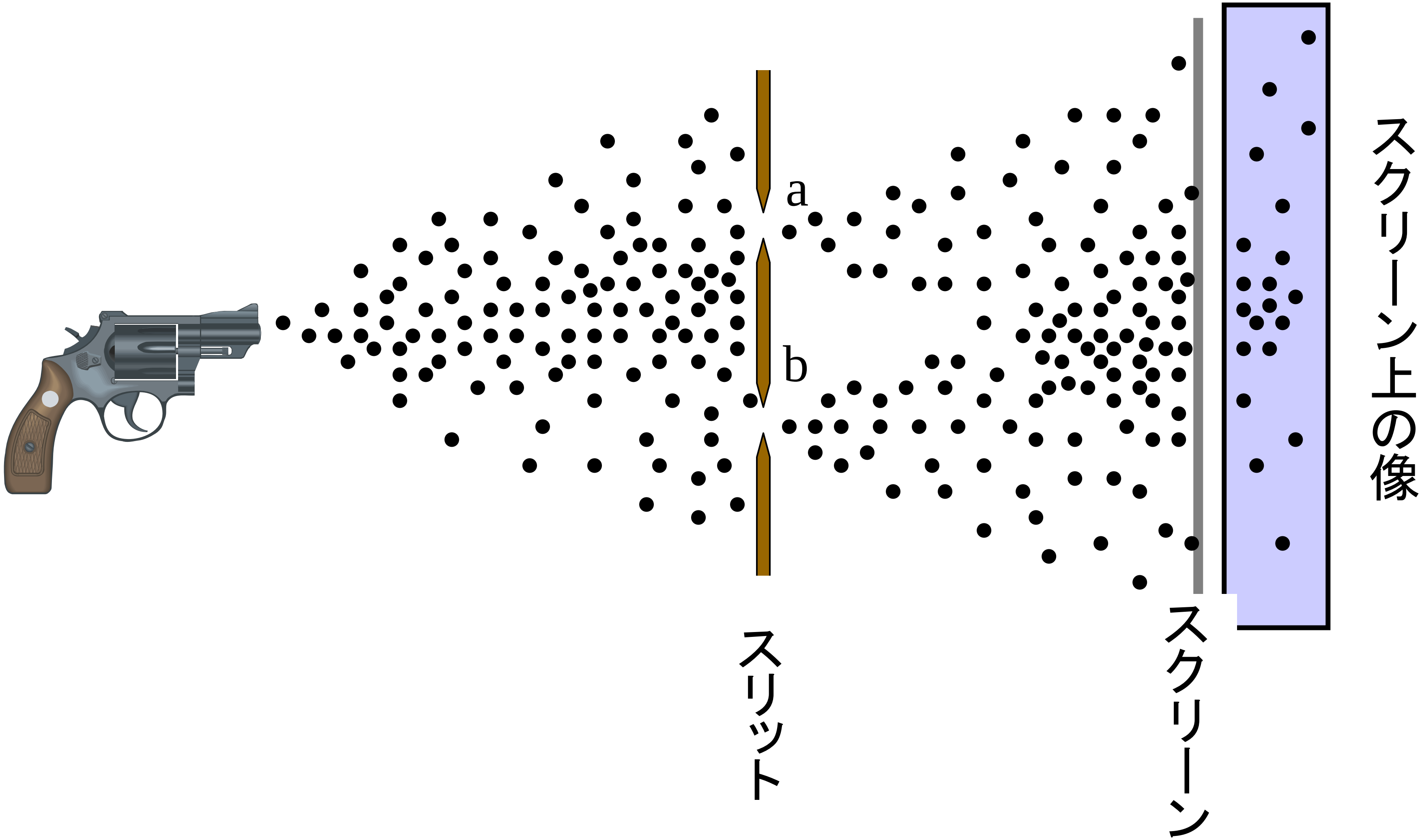








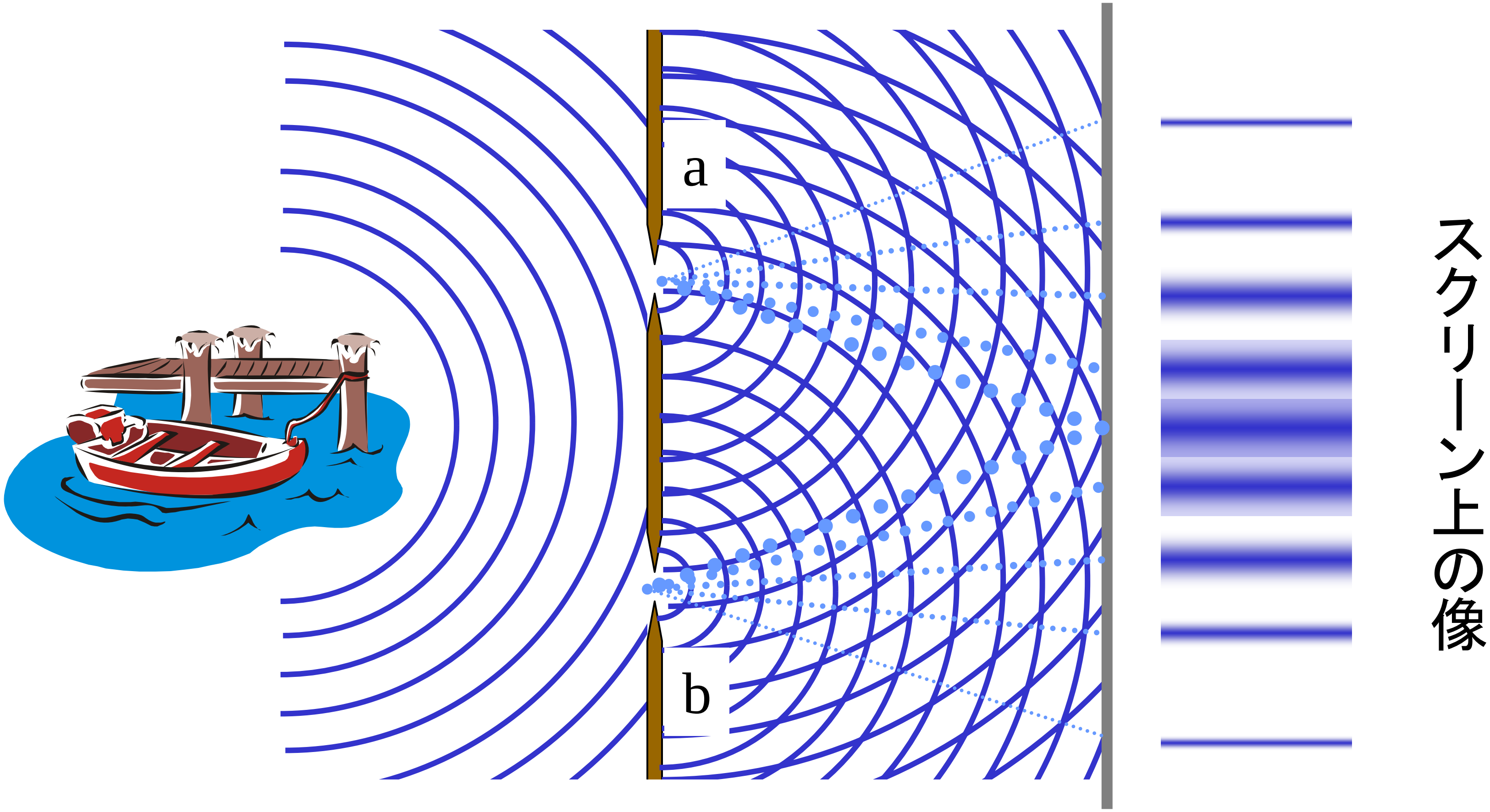
粒子の2スリットの通過



① 1つの粒子は a か b かのどちらか1つのスリットを通過する.

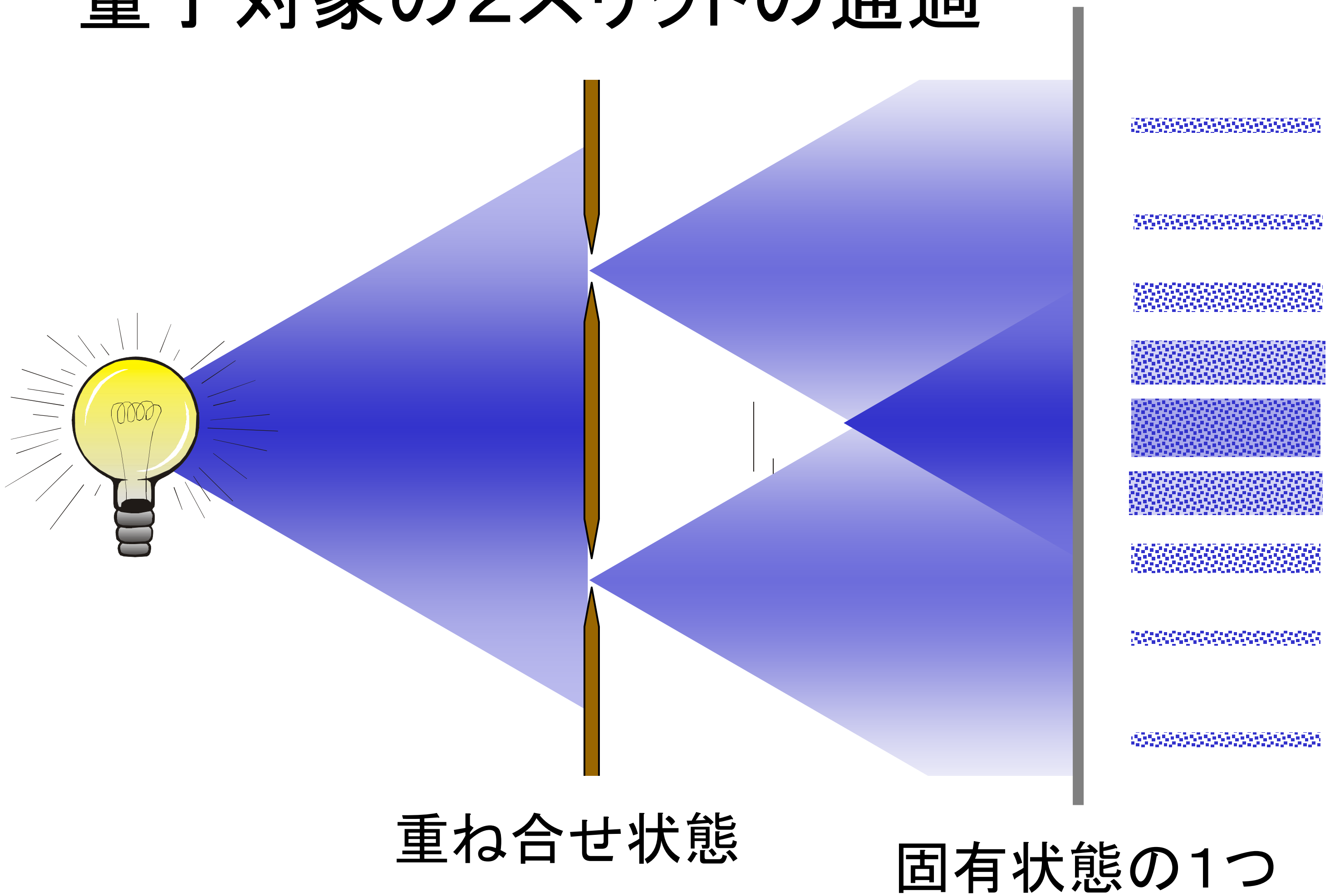
② スクリーン上では1つの粒子に対し，1つの点が対応する.

波の2スリットの通過



① 1つの波が a, b の両スリットを通過する.
② 強度がどれだけ小さくてもスクリーン上では全体に広がる.

量子対象の2スリットの通過



① 1つの量子対象でも a, b の両スリットを通過する.

② スクリーン上では1つの対象に対し，1つの点が対応する.