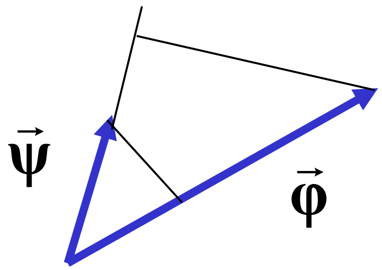
# 量子力学の定式化Ⅲ

非可換代数
行列力学

# [空間ベクトル]

（1）内積：$\vec{\boldsymbol{\psi}}\cdot\vec{\boldsymbol{\varphi}}$



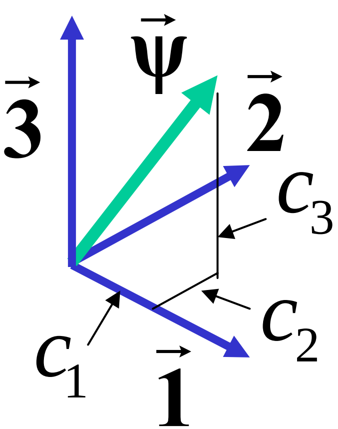

（2）基準単位ベクトル（直交規格条件）

$$\vec{\mathbf{1}},\vec{\mathbf{2}},\vec{\mathbf{3}}\,;\quad \vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\mathbf{j}}=\delta_{ij}$$

（3）任意の単位ベクトル

$$\vec{\boldsymbol{\psi}}=c_1\vec{\mathbf{1}}+c_2\vec{\mathbf{2}}+c_3\vec{\mathbf{3}}=\sum_{\vec{\mathbf{i}}}\vec{\mathbf{i}}\left(\vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\boldsymbol{\psi}}\right);\quad c_i=\vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\boldsymbol{\psi}}$$

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$$




（4）座標変換

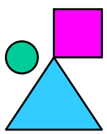
$$\vec{\boldsymbol{\psi}}=\sum_{\vec{\mathbf{j}}'}\vec{\mathbf{j}}'\left(\vec{\mathbf{j}}'\cdot\vec{\boldsymbol{\psi}}\right)=\sum_{\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}}'}\vec{\mathbf{j}}'\left(\vec{\mathbf{j}}'\cdot\vec{\mathbf{i}}\right)\left(\vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\boldsymbol{\psi}}\right)$$

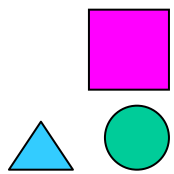
$$1=\cdot\vec{\mathbf{i}})(\vec{\mathbf{i}}\cdot$$

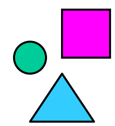
# [状態関数]

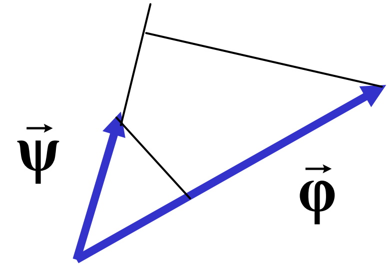
## (1) 内積

$\psi(x)$ $\qquad$ $\phi(x)$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \phi(x)\,dx$

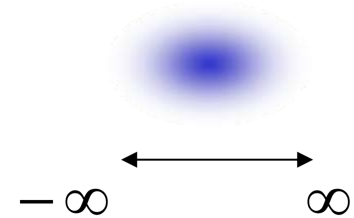






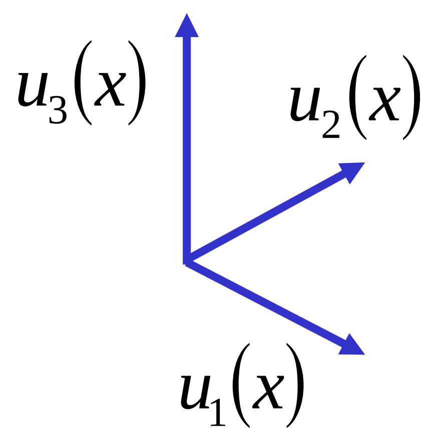



$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \phi(x)\,dx = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)^* \psi(x)\,dx \right\}^*$$




## (2) 基底(基準固有関数)

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ u_4(x),\ u_5(x),\ \cdots$$

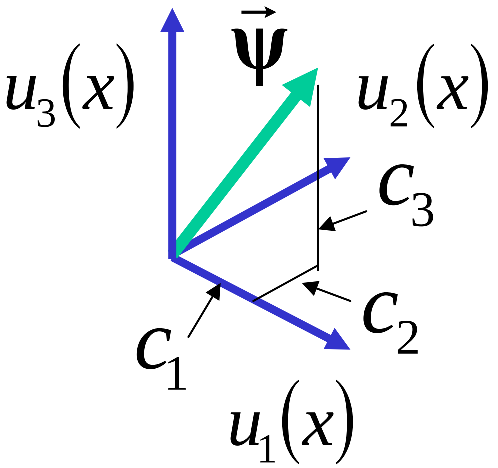


## (3) 状態関数

$$\psi(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + c_3 u_3(x) + c_4 u_4(x) + \cdots$$

## (4) 直交規格化:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_j^*(x) u_i(x) dx = \delta_{ij}$$




## (5) 完全性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \psi(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{c_1^* u_1^*(x) + c_2^* u_2^*(x) + \cdots\}\{c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots\} dx = 1$$

$$c_1^* c_1 + c_2^* c_2 + c_3^* c_3 + c_4^* c_4 + c_5^* c_5 + \cdots$$

$$= |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_4|^2 + |c_5|^2 + \cdots = 1$$

# 状態ベクトル

状態関数をベクトルで表示

[記号]

$\langle\ |$ :ブラベクトル(bra vector)

$|\ \rangle$ :ケットベクトル(ket vector)

$\langle\quad\rangle$ : bracket

状態ベクトルを特徴付ける英数字

$|\lambda\rangle$ :固有値 $\lambda\hbar^2$ の固有ベクトル

$|l, m, n\rangle$ :量子数 $l, m, n$ の同時固有ベクトル

$|x\rangle$ : $x$ 座標系での状態ベクトル

$|\ \rangle, |\psi\rangle$ :一般状態ベクトル

# 状態ベクトルの諸性質

（1）内積

$$\langle\psi|\phi\rangle, \qquad \langle\psi| = |\psi\rangle^*, \quad \langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*$$

（2）基底(基準ベクトル）

$$|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle, \cdots, |N\rangle$$

$$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle + c_4|4\rangle + c_5|5\rangle + \cdots + c_N|N\rangle$$

（3）直交規格化

$$\langle j|i\rangle = \delta_{ji}$$

（4）完全，完全性

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i|i\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle i|\psi\rangle|i\rangle = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|i\rangle\langle i|\right)|\psi\rangle$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|i\rangle\langle i| = 1$$ ：完全性の条件

# 無限連続のベクトル

$$\boxed{\left|\psi\right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \left|i\right\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} c(x)\left|x\right\rangle dx}$$

$$\left\langle\psi\middle|\psi\right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \left|c_i\right|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left|c(x)\right|^2 dx$$

$$\Longrightarrow \quad \left\langle j\middle|i\right\rangle = \delta_{ij}, \quad \left\langle x\middle|x'\right\rangle = \delta(x-x'), \quad \left\langle i\middle|x\right\rangle = 0$$

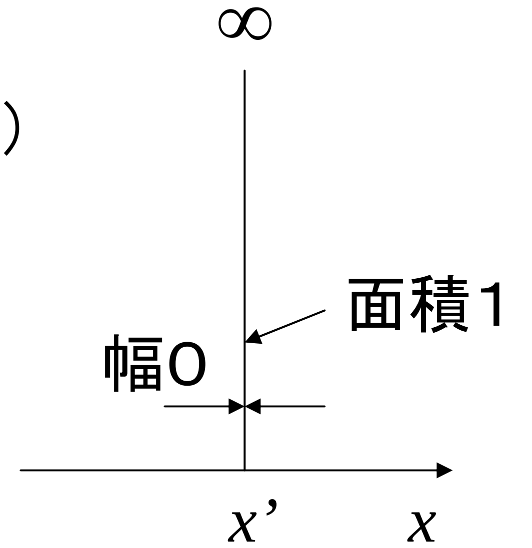
☆ Dirac のデルタ関数

$x \neq x'$ で $\delta(x-x') = 0$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')dx = 1$

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx$$

（ $f(x)$ :連続関数）

デルタ関数の一例 $\quad \delta(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}dp$




☆ 完全性

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|i\right\rangle\left\langle i\right| + \int_{-\infty}^{\infty} \left|x\right\rangle dx \left\langle x\right| = 1$$

# 状態，物理量，測定値

同一状態 $|\psi\rangle$ を色々な物理量 $\hat{E}, \hat{p}, \cdots$ の固有関数で表示可能

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= c_{e,1}|1_e\rangle + c_{e,2}|2_e\rangle + c_{e,3}|3_e\rangle + c_{e,4}|4_e\rangle + \cdots + c_{e,N}|N_e\rangle \\
&= c_{p,1}|1_p\rangle + c_{p,2}|2_p\rangle + c_{p,3}|3_p\rangle + c_{p,4}|4_p\rangle + \cdots + c_{p,M}|M_p\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{E}|1_e\rangle = a_{e,1}|1_e\rangle,\ \hat{E}|2_e\rangle = a_{e,2}|2_e\rangle,\ \hat{E}|3_e\rangle = a_{e,3}|3_e\rangle, \cdots \\
&\hat{p}|1_p\rangle = a_{p,1}|1_p\rangle,\ \hat{p}|2_p\rangle = a_{p,2}|2_p\rangle,\ \hat{p}|3_p\rangle = a_{p,3}|3_p\rangle, \cdots
\end{aligned}
$$

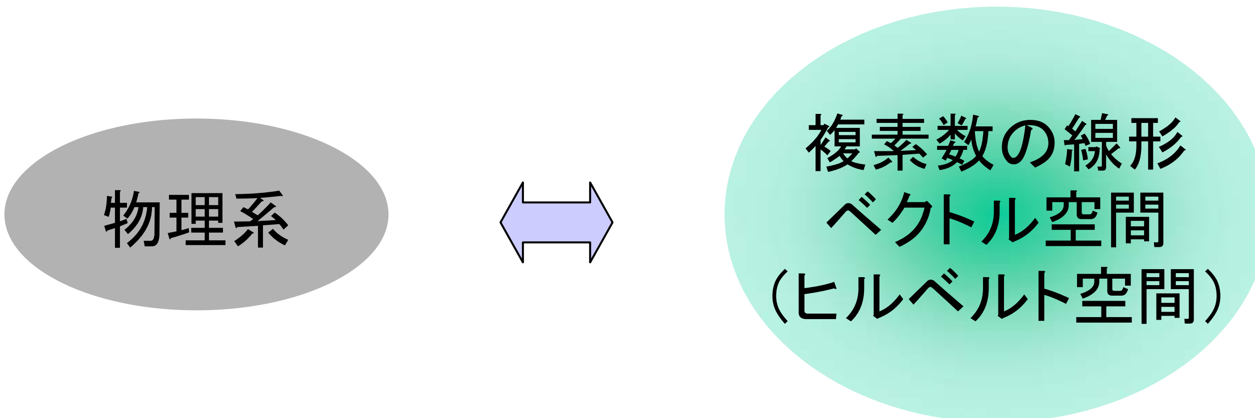
観測（＝物理量 $\hat{E}, \hat{p}, \cdots$ に対応する操作）を行うと固有値

$a_{e,1}, a_{e,2}, a_{e,3}, a_{e,4}, \cdots, a_{e,N}$ の1つを測定値として得る.

各固有値を測定値として得る確率は $|c_{e,1}|^2, |c_{e,2}|^2, |c_{e,3}|^2, |c_{e,4}|^2, \cdots$ に比例する.

# 量子力学における主要概念

（１）状態ベクトル




（２）物理量

線形演算子　$\hat{A}, \hat{B}, \cdots$

$$\hat{A}|k\rangle = a_k |k\rangle$$

$a_k : \hat{A}$ の固有値,　　$|k\rangle : a_k$ の固有ベクトル

（3）量子条件

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=i\hbar:$$ 正準な交換関係（非可換関係）

☆

［証明］

ディラック（Dirac）の括弧式の定義

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$$ 行列との類似性

量子条件：

物理量＝演算子 ⇒ 変換代数では ？

$$\hat{B}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial A}$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{A},\hat{B}\right]|\psi\rangle&=\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)|\psi\rangle\\&=-i\hbar\left(A\frac{\partial}{\partial A}-\frac{\partial}{\partial A}A\right)|\psi\rangle\\&=-i\hbar\left(A\frac{\partial}{\partial A}-A\frac{\partial}{\partial A}-1\right)|\psi\rangle\end{aligned}$$

# (4)測定値

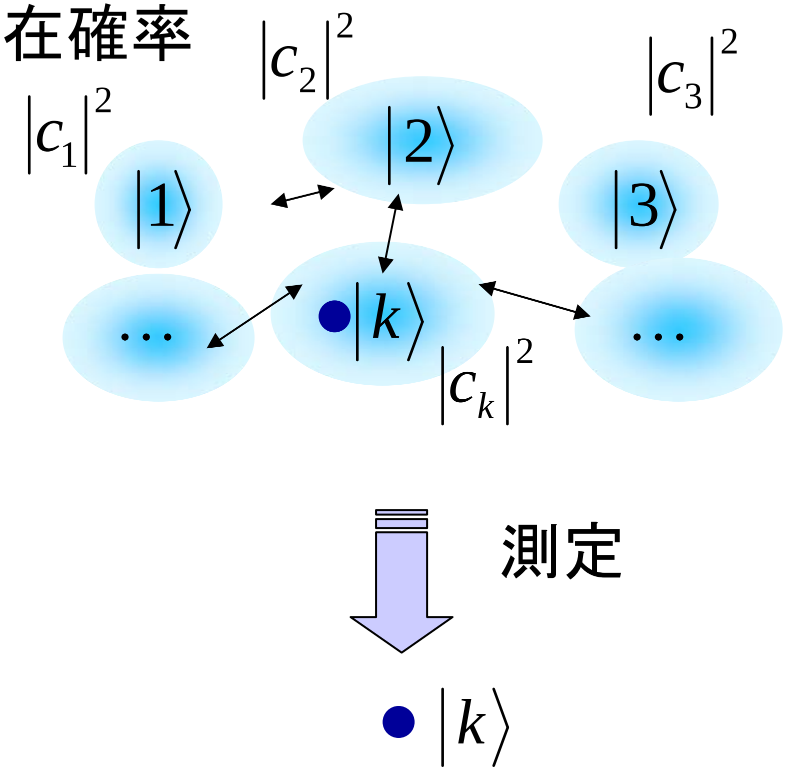
$$\hat{A}$$

⇩ 測定

$$\overbrace{\left|\psi\right\rangle = c_1\left|1\right\rangle + c_2\left|2\right\rangle + \cdots + c_k\left|k\right\rangle + \cdots}$$

$$\hat{A}\left|1\right\rangle = a_1\left|1\right\rangle, \cdots, \hat{A}\left|k\right\rangle = a_k\left|k\right\rangle, \cdots$$

存在確率



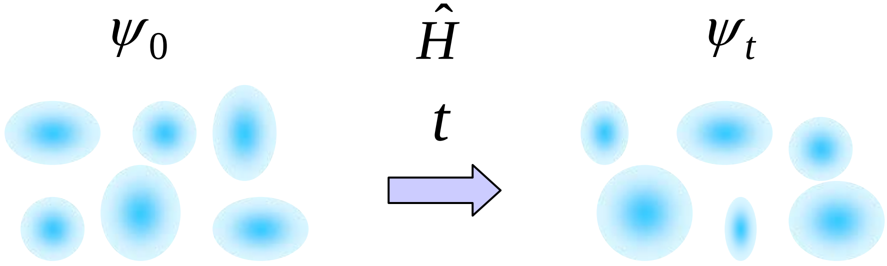

⇨ 測定値: $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$ のどれか1つ

⇨ $a_k$ を得る確率

$$w_k = |c_k|^2 = \left|\left\langle k \middle| \psi \right\rangle\right|^2$$

## （5）運動

☆　シュレーディンガー描像




$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}\psi$$

状態ベクトルは時間とともに連続的，因果的に変化

☆　ハイゼンベルグ描像

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{A}\right] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$

物理量が変化

# 演算子の可換性

1つのベクトル　＝　多くの演算子の固有ベクトル

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle, \quad \hat{C}|c\rangle = c|c\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{A}|a,c\rangle = a|a,c\rangle, \quad \hat{C}|a,c\rangle = c|a,c\rangle$$

$$\hat{C}\times \qquad\qquad \hat{A}\times$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\hat{C}\hat{A}|a,c\rangle = ac|a,c\rangle, \quad \hat{A}\hat{C}|a,c\rangle = ca|a,c\rangle$$

$$-$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\hat{A},\hat{C}\right]|a,c\rangle = ac|a,c\rangle$$

$$\therefore \quad \left[\hat{A},\hat{C}\right] = 0$$

$\hat{A}, \hat{C}$　は互いに交換可能（可換）

# 非可換代数で運動方程式を解く

固有値方程式: $\hat{A}|n\rangle = a_n|n\rangle$ ← （2階微分方程式）

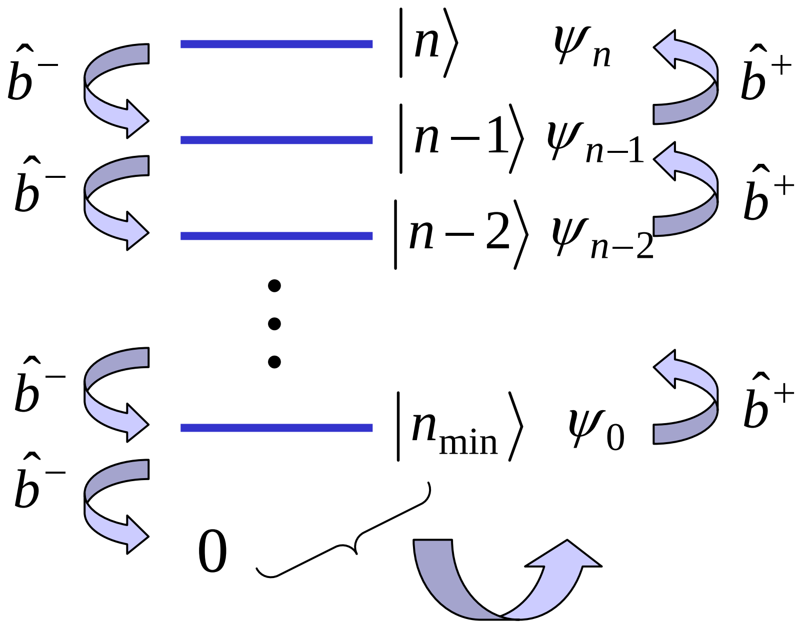
別に

物理量でない演算子

固有値でない係数

$$\hat{b}^-|n\rangle = c|n-1\rangle$$

量子数を1つ下げる




☆ 最終的に

$\hat{b}^-|n_{\min}\rangle = 0$ ← 簡単な微分方程式

（1階微分方程式）

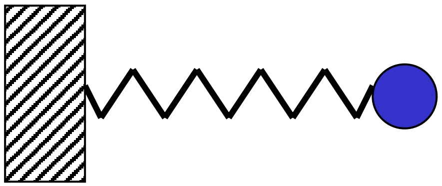
⇒ 解: $\psi_0$

$$\hat{b}^+\psi_0 = c'\psi_1, \quad \hat{b}^+\psi_1 = c'\psi_2, \quad \cdots, \quad \hat{b}^+\psi_{n-1} = c'\psi_n$$

# 調和振動子

［下降演算子，上昇演算子］

$$\frac{1}{2}Cx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$



$$\hat{H} = \underline{\frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{1}{2m}\hat{p}^2}$$

$$= \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + \frac{1}{m^2\omega^2}\hat{p}^2\right)$$

$$= \frac{m\omega^2}{2}\left\{\left(x - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)\left(x + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) - \frac{i}{m\omega}\underbrace{\left(x\hat{p} - \hat{p}x\right)}\right\}$$

$$\underline{\left[x, \hat{p}\right] = i\hbar}$$

# 共役な演算子

$$a^{+}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

$$a^{-}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{a}^{-},\hat{a}^{+}\right]&=\hat{a}^{-}\hat{a}^{+}-\hat{a}^{+}\hat{a}^{-}\\&=\frac{m\omega}{2\hbar}\left\{\left(x^{2}+\frac{1}{m^{2}\omega^{2}}\hat{p}^{2}\right)-\frac{i}{m\omega}(x\hat{p}-\hat{p}x)-\left(x^{2}+\frac{1}{m^{2}\omega^{2}}\hat{p}^{2}\right)-\frac{i}{m\omega}(x\hat{p}-\hat{p}x)\right\}\\&=1\end{aligned}$$

$$[x,\hat{p}]=i\hbar$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{H}&=\hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\hat{a}^{-}+\frac{1}{2}\right)\\\left[\hat{a}^{-},\hat{a}^{+}\right]&=1\end{aligned}}$$

固有状態 $|n\rangle$ の固有値を $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ とおき，

$$\boxed{\begin{array}{ll} \hat{a}^{+}\hat{a}^{-}|n\rangle = n|n\rangle & (1) \\ \left[\hat{a}^{-},\hat{a}^{+}\right] = \hat{a}^{-}\hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}\hat{a}^{-} = 1 & (2) \end{array}}$$

$$\hat{a}^{-}\times(1) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\hat{a}^{-}\hat{a}^{+}}_{\left(\hat{a}^{+}\hat{a}^{-}+1\right)}\hat{a}^{-}|n\rangle = n\hat{a}^{-}|n\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}^{+}\hat{a}^{-}\left(\hat{a}^{-}|n\rangle\right) = (n-1)\left(\hat{a}^{-}|n\rangle\right)$$

一方，（１）より $\quad \hat{a}^{+}\hat{a}^{-}|n-1\rangle = (n-1)|n-1\rangle$

$$\therefore \quad \hat{a}^{-}|n\rangle = c|n-1\rangle\ ; \quad \hat{a}^{-}:$$ 下降演算子 （３）

同様にして，

$$\hat{a}^{+}|n\rangle = c'|n+1\rangle\ ; \quad \hat{a}^{+}:$$ 上昇演算子

［正規化定数 $c$ ］

（3）の複素共役 ⇒ $\langle n|\hat{a}^{+} = \langle n-1|c^{*}$ ← $\times(3)$

$$\Rightarrow \quad n = \langle n|\underbrace{\hat{a}^{+}\hat{a}^{-}|n\rangle}_{n|n\rangle} = \langle n-1|c^{*}c|n-1\rangle = |c|^{2}$$

また，$\langle n|n\rangle = 1, \quad \langle n-1|n-1\rangle = 1$

$$\therefore \quad c = \sqrt{n}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a}^{-}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^{+}|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned}}$$

［固有状態］

$$\hat{a}^{-}\left|0\right\rangle = 0, \quad \left|0\right\rangle = u_0(x)$$

c- 数にして $\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\right)u_0(x) = 0$

$$\left( \quad \frac{d\{u_0(x)\}}{u_0(x)} = -\frac{m\omega}{\hbar}xdx \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} C\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = 1 \quad \right)$$

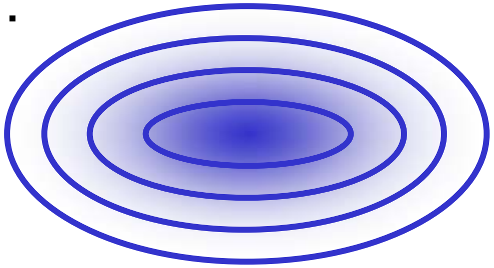
⇒ 正規化した基底状態 $u_0(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$

一般的な励起状態 $\left|n\right\rangle = \frac{\left(\hat{a}^{+}\right)^n}{\sqrt{n!}}\left|0\right\rangle$

$$u_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\, 2^{n/2}(n!)^{1/2}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{n+\frac{1}{2}}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

# 光子の生成，消滅（場の量子化）

場：　空間に調和振動子が埋め込まれている．



電磁波＝光子（フォトン）

1フォトンのエネルギー　＝　$\hbar\omega$

（Einstein）

調和振動子では1準位上がるに従い　$1\hbar\omega$ だけ増える

$\Longleftrightarrow$　フォトンが1つづつ増える

新しい見方，新しい定義

$$\hat{a}^{-}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle$$

$$\hat{a}^{+}\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle$$

$$\hat{a}^{+}\hat{a}^{-}\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle$$

$$\left[\hat{a}^{-},\hat{a}^{+}\right] = \hat{a}^{-}\hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}\hat{a}^{-} = 1$$

**前提**

$$\begin{cases} \hat{a}^{+}|n\rangle = c^{+}|n+1\rangle & :“生成演算子”，フォトン数を1つ増やす \\ \hat{a}^{-}|n\rangle = c^{-}|n-1\rangle & :“消滅演算子”，フォトン数を1つ減らす \\ P_{n,\,n-1} = n & \end{cases}$$

$$P_{n,n-1} = \left|\langle n-1|\hat{a}^{-}|n\rangle\right|^{2}$$

$$= \left|c^{-}\langle n-1|n-1\rangle\right|^{2}$$

$$= \left|c^{-}\right|^{2} = n$$

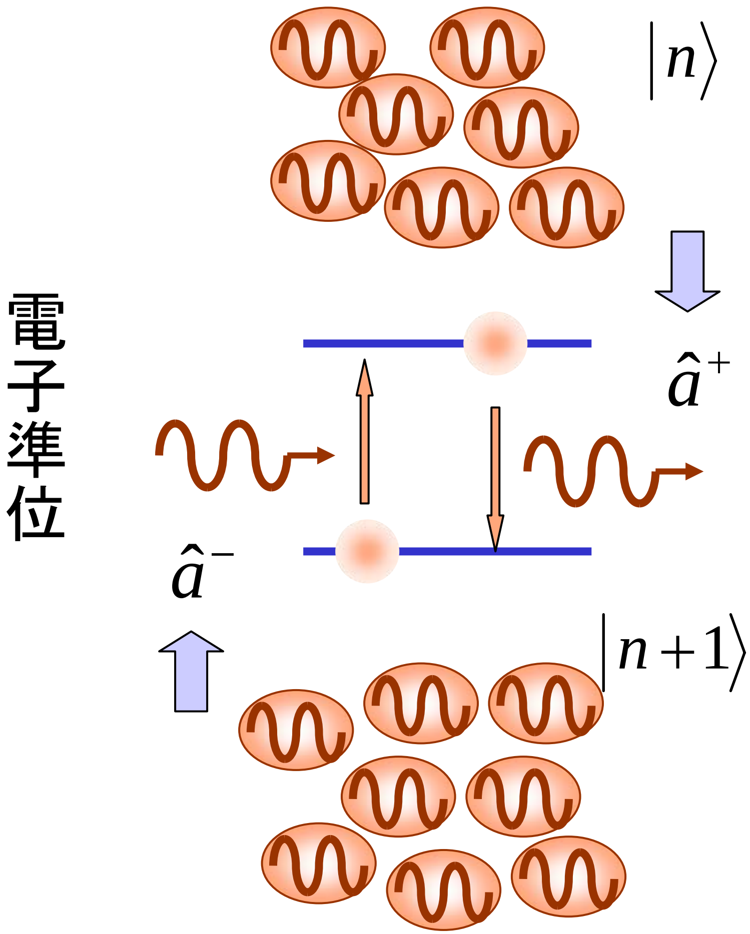
$$\therefore \quad c^{-} = \sqrt{n}$$

$$c^{+} = \langle n+1|\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$= \langle n|\hat{a}^{-}|n+1\rangle^{*} = \sqrt{n+1}$$

$$\hat{a}^{-}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$\hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$



$$\hat{a}^{+}\hat{a}^{-}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\,\hat{a}^{+}\left|n-1\right\rangle = n\left|n\right\rangle$$

$\hat{a}^{+}\hat{a}^{-}$： フォトン数に関する演算子

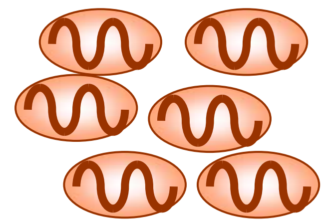
$\left|n\right\rangle$： フォトンの数が $n$ である状態

$\left|0\right\rangle$： フォトン数0の状態

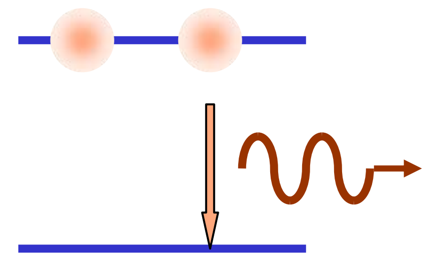
$n$ 個の光子を持つエネルギー固有状態，固有関数

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad \left|n\right\rangle$$

## 誘導輻射



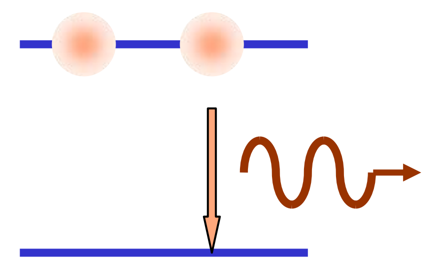
電子準位



$$
\begin{aligned}
P_{n\to n+1} &= \left|\langle n+1|\hat{a}^{+}|n\rangle\right|^{2} \\
&= \left|\sqrt{n+1}\langle n+1|n+1\rangle\right|^{2} \\
&= n+1
\end{aligned}
$$

## 自然輻射

電子準位



$$
P_{0\to 1} = \left|\langle 1|\hat{a}^{+}|0\rangle\right|^{2} = \left|\sqrt{1}\langle 1|1\rangle\right|^{2} = 1
$$

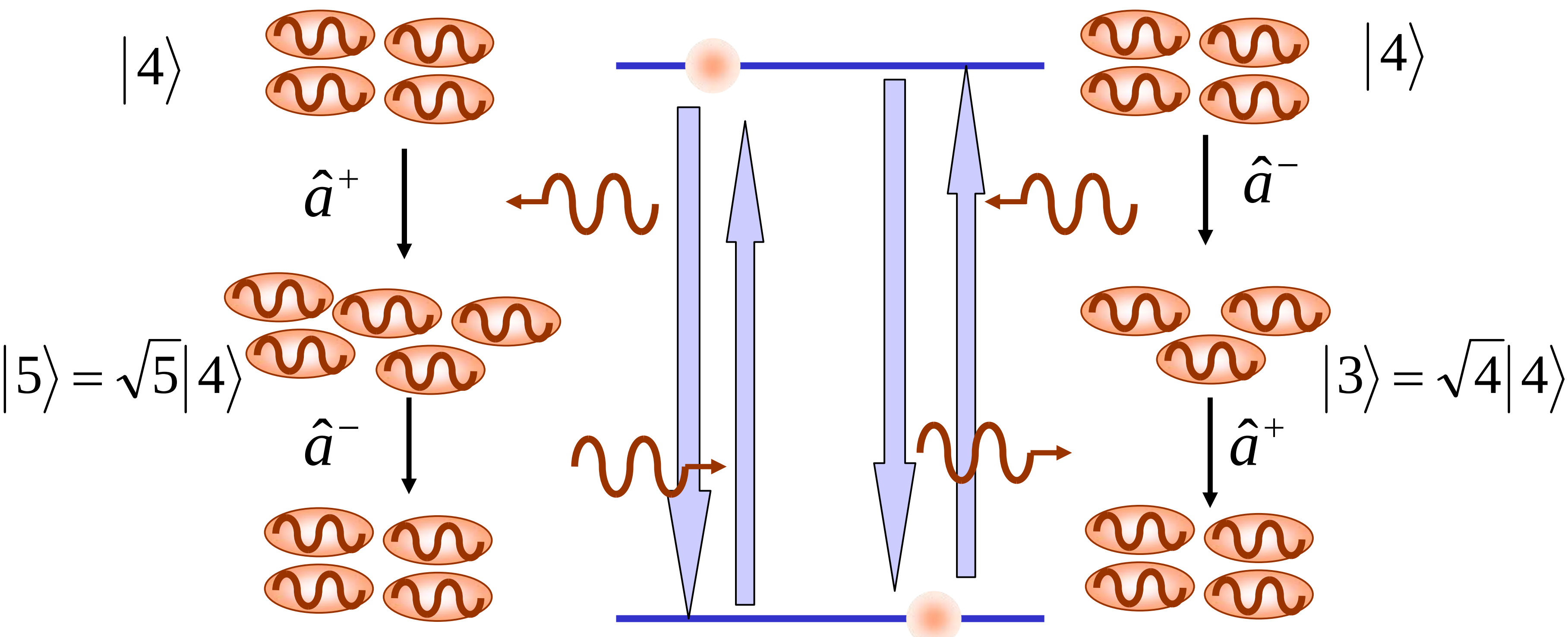
⇨ 「$n$ 個の光子が存在している誘導輻射

＝　自然輻射に比べて $n$+1 倍輻射しやすい」

**レーザーの原理**

$$\left[\hat{a}^{-},\hat{a}^{+}\right]|n\rangle = \hat{a}^{-}\hat{a}^{+}|n\rangle - \hat{a}^{+}\hat{a}^{-}|n\rangle = (n+1)|n\rangle - n|n\rangle = |n\rangle$$

$$\left[\hat{a}^{-},\hat{a}^{+}\right] = 1$$




$$|4\rangle_{4\to5\to4} = \sqrt{5}|5\rangle = 5|4\rangle \qquad |4\rangle_{4\to3\to4} = \sqrt{4}|3\rangle = 4|4\rangle$$

$$|4\rangle_{4\to5\to4} - |4\rangle_{4\to3\to4} = 5|4\rangle$$

# 角運動量演算子

角運動量に関する交換関係

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = (y\hat{p}_z - z\hat{p}_y)(z\hat{p}_x - x\hat{p}_z) - (z\hat{p}_x - x\hat{p}_z)(y\hat{p}_z - z\hat{p}_y)$$

$$= y\hat{p}_x\hat{p}_z z + \hat{p}_y xz\hat{p}_z - \hat{p}_x yz\hat{p}_z - x\hat{p}_y\hat{p}_z z$$

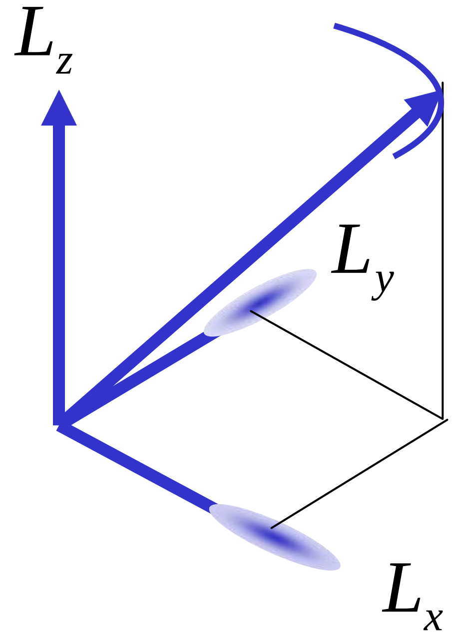
$$= \underbrace{(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x)}_{\hat{L}_z}\underbrace{(z\hat{p}_z - \hat{p}_z z)}_{[z,\ \hat{p}_z] = i\hbar} = i\hbar\hat{L}_z$$

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = i\hbar\hat{L}_z, \quad \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] = i\hbar\hat{L}_x, \quad \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] = i\hbar\hat{L}_y$$

$|\lambda, m\rangle$:　$\hat{L}^2, \hat{L}_z$ の共通固有ベクトル

（$\hat{L}^2$ と可換な角運動量成分は $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ のうち1つ）

$$\begin{cases} \hat{L}^2|\lambda,m\rangle = \lambda\hbar^2|\lambda,m\rangle \\ \hat{L}_z|\lambda,m\rangle = m\hbar|\lambda,m\rangle \end{cases}$$




上昇・下降演算子を次式とおく

$$\hat{L}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y\right)$$

上昇・下降演算子に関する交換関係

$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{L}_\pm, \quad \left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] = \hbar\hat{L}_z$$

$$\hat{L}_z\hat{L}_+ \quad \times \quad \left|\lambda, m\right\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\hat{L}_z\left(\hat{L}_+}\left|\lambda, m\right\rangle\right) = \hat{L}_+\left(\hat{L}_z\left|\lambda, m\right\rangle\right) + \hbar\hat{L}_z\left|\lambda, m\right\rangle = (m+1)\hbar\left(\hat{L}_+\left|\lambda, m\right\rangle\right)$$

$$\hat{L}_z\hat{L}_+ = \hat{L}_+\hat{L}_z + \hbar\hat{L}_z$$

一方，$\hat{L}_z\left|\lambda, m+1\right\rangle = (m+1)\hbar\left|\lambda, m+1\right\rangle$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\hat{L}_+\left|\lambda, m\right\rangle = c\left|\lambda, m+1\right\rangle}$$ ：上昇演算子

同様に

$$\underline{\hat{L}_-\left|\lambda, m\right\rangle = c'\left|\lambda, m-1\right\rangle}$$ ：下降演算子

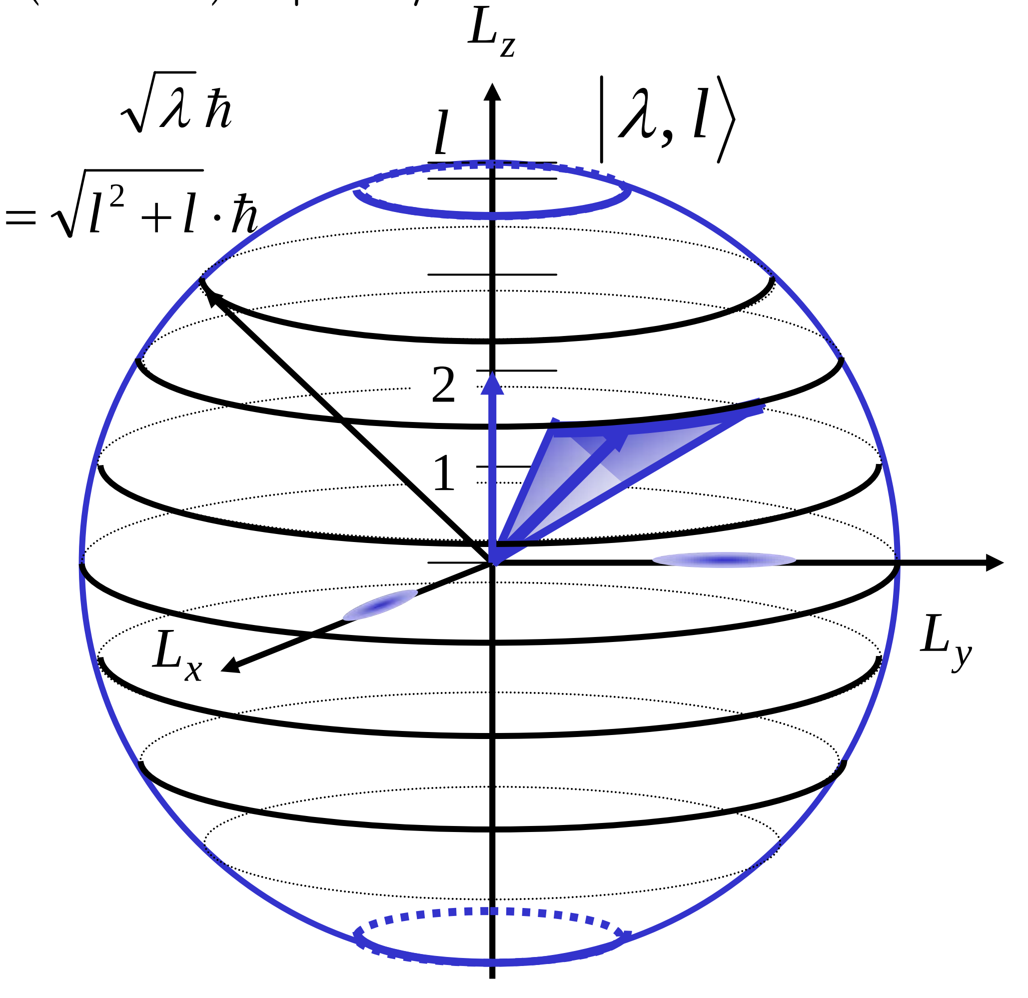
$$\boxed{\begin{array}{l} L^2 = \lambda\hbar^2 = const.; \quad \hat{L}_+\left|m\right\rangle \cdots \rightarrow l = m_{\max} \\ \hat{L}_+\left|\lambda, l\right\rangle = 0 \quad \text{：簡単な微分方程式} \end{array}}$$

$$\hat{L}^2 = 2\hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z$$

$$\Rightarrow \quad \lambda\hbar^2|\lambda, m\rangle = 2\hat{L}_-\hat{L}_+|\lambda, m\rangle + \left(m^2 + m\right)\hbar^2|\lambda, m\rangle$$

$m_{\max} = l:$

$$\begin{cases} \lambda\hbar^2|\lambda, l\rangle = \left(l^2 + l\right)\hbar^2|\lambda, l\rangle \\ \hat{L}_+|\lambda, l\rangle = 0 \end{cases}$$



$$L^2 = \lambda \hbar^2 = \left(l^2 + l\right)\hbar^2 > l^2\hbar^2 = L_{z,\,\max}^2$$

[量子力学]

$$\Delta L_x > 0, \quad \Delta L_y > 0$$

$$\Rightarrow \quad L > L_{z,\max}$$

$$\Leftrightarrow$$

[古典力学]

$$L = L_{z,\max}\,; \quad L_x = L_y = 0$$

---

$$\left.\begin{aligned} &\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y = \hbar e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ &\left|\lambda, m\right\rangle = \left|l, m\right\rangle = Y_{lm}\left(\theta\right)e^{im\phi} \end{aligned}\right\}$$

$$\hat{L}_+\left|l, l\right\rangle = \hbar e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)Y_{ll}\left(\theta\right)e^{il\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{d}{d\theta} - l\cot\theta\right)Y_{ll}\left(\theta\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{ll}\left(\theta\right) = c\sin^l\theta$$

---

$$w = \sin\theta \quad \to \quad dw = \cos\theta \cdot d\theta \quad \to \quad dY_{ll}/Y_{ll} = l\,dw/w$$

# 正規化条件

$$\longrightarrow \qquad \left| l, l \right\rangle = Y_{ll}(\theta) e^{il\phi} = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \sin^l \theta \, e^{il\phi}$$

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y = \hbar e^{-i\theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$\hat{L}_- \left| l, l \right\rangle = \left| l, l-1 \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \left| l, m \right\rangle = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(l+m)!(2l+1)}{4\pi(l-m)!}} \frac{e^{im\phi}}{\left( \sqrt{1-\xi^2} \right)^m} \frac{d^{l-m}}{d\xi^{l-m}} \left( 1 - \xi^2 \right)^l$$

# 行列力学

演算子 $\hat{A}$ の意味

☆ 物理量： 固有ベクトル $|k\rangle$

$$\hat{A}|k\rangle = a_k|k\rangle$$

$\langle k| \times$

$$\langle k|\hat{A}|k\rangle = \langle k|a_k|k\rangle = a_k\underbrace{\langle k|k\rangle}_{1} = a_k$$

$a_k = a_{kk}$ とおく

☆ 遷移，相互作用

$$\alpha_{ji} = \langle j|\hat{A}|i\rangle$$

$|i\rangle$

$\hat{A}$

遷移，相互作用

$|j\rangle$

*[シュレーディンガー方程式による量子力学]*

*[行列力学]*

物理量(演算子)空間

$\hat{p}, q, \hat{L}, \theta,$

$\hat{E}, t, \cdots$

作用

状態ベクトル空間

$|k\rangle, |\lambda\rangle, |m\rangle,$

$|i\rangle, \cdots$

所望の

固有値，遷移量，相互作用量

まとめる

$$\begin{pmatrix} \langle 1|\hat{A}|1\rangle & \langle 1|\hat{A}|2\rangle & \cdots \\ \langle 2|\hat{A}|1\rangle & \langle 2|\hat{A}|2\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha_{12} & \cdots \\ \alpha_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

# 量子力学における物理量を要素とする行列（エルミート行列）

$$\begin{pmatrix} a_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12}^* & a_2 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13}^* & \alpha_{23}^* & a_3 & \alpha_{34} \\ \alpha_{14}^* & \alpha_{24}^* & \alpha_{34}^* & a_4 \end{pmatrix}$$

エルミート行列：　対称要素が複素共役（対角位置は実数）

## ［エルミート行列である根拠］

（1）対角要素

対角要素　＝　固有値　⇒　実数（測定値）

（2）非対角要素

対称要素はお互いに逆遷移

$$|j\rangle = e^{i\theta}|i\rangle, \quad |i\rangle = e^{-i\theta}|j\rangle$$

［エルミート行列　⇔　エルミート演算子］

エルミート演算子:　$\hat{A}^{+} = \hat{A}$,　$\hat{A}^{+}$：演算子 $\hat{A}$ の複素共役

（1）対角要素

$$\left.\begin{aligned} &a = \langle a|\hat{A}|a\rangle, \quad a^{*} = \langle a|\hat{A}|a\rangle^{*} = \langle a|\hat{A}^{+}|a\rangle \\ &a^{*} = a, \quad \because a: \text{実数} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \hat{A}^{+} = \hat{A}$$

（1）非対角要素

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{ij} = \langle i|\hat{A}|j\rangle, \quad \alpha_{ji}^{*} = \langle j|\hat{A}|i\rangle^{*} = \langle i|\hat{A}^{+}|j\rangle \\ &\alpha_{ji}^{*} = \alpha_{ij} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \hat{A}^{+} = \hat{A}$$

# ベクトル演算

（１）エルミート演算子の異なる固有値の固有ベクトル

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle, \qquad \hat{A}|b\rangle = b|b\rangle$$

$$\langle b| \times \qquad \langle a| \times$$

$$\langle a|\hat{A}|b\rangle = b\langle a|b\rangle$$

$$\langle a|\hat{A}|b\rangle^* = b\langle a|b\rangle^*$$

$$\langle b|\hat{A}|a\rangle = a\langle b|a\rangle \qquad \langle b|\hat{A}|a\rangle = b\langle b|a\rangle$$

$$(a-b)\langle b|a\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle b|a\rangle = 0$$

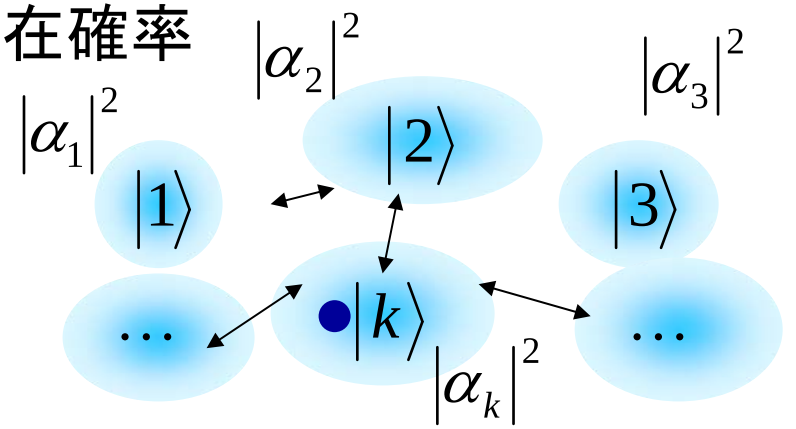
直交性

## (2)一般状態の物理量

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |k\rangle$$

$$\alpha_k = \langle k|\psi\rangle, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = 1$$

存在確率




$$\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a_k |k\rangle$$

$$\langle\psi| = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^* \langle k| \times$$

$$\hat{A}|k\rangle = a_k|k\rangle$$

測定

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle k|\alpha_k^* \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a_k |k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k |\alpha_k|^2$$

状態 $|\psi\rangle$ で $\hat{A}$ を測定して得られる結果の期待値

# 運動方程式の表示法各種

$$i\hbar \frac{dC_i}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} H_{ij} C_j , \quad C_i(t) = \langle x | \psi(t) \rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle i | \psi \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} H_{ij} \langle j | \psi \rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} H_{ij} | j \rangle \langle j | \psi \rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi \rangle = \hat{H} | \psi \rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} = \hat{H}$$

$$\hat{E} | \psi \rangle = \hat{H} | \psi \rangle$$

# ［不確定性原理］

**不確定性関係**

$$\Delta p \cdot \Delta q \geq \hbar$$

**状態関数（複素関数の重ね合せ）**

$$\psi(q) = \sum_j c_j e^{i\frac{p_j}{\hbar}q}$$

**物理量＝演算子**

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$$

**正準な交換関係**

$$[q, \hat{p}] = i\hbar$$

## ［運動方程式］

Schrödinger 方程式
（Schrödinger 描像,
Heisenberg 描像）

$$\hat{H}\psi = \hat{E}\psi$$

⇩

変換理論

$$\hat{a}^{-}\left|0\right\rangle = 0$$