

修士学位論文

有限アスペクト比のテイラー渦における  
多重モード形成に関する数値的研究

指導教官 渡辺 崇 教授

名古屋大学大学院 人間情報学研究科  
物質・生命情報学専攻 情報処理論講座

31970314-2:古川裕之

平成11年1月29日提出

# 目次

第1章 諸論	3
1.1 研究の意義と目的	3
1.2 本研究の概要	4
第2章 数値計算手法	6
2.1 主な記号	6
2.2 支配方程式とその無次元化	7
2.3 MAC法	8
2.4 格子の配置	10
2.5 境界条件	10
2.5.1 速度境界条件	10
2.5.2 圧力境界条件	11
2.6 支配方程式の離散化	13
2.6.1 運動方程式	13
2.6.2 圧力方程式	16
2.6.3 各種物理量	17
2.6.4 厳密クエット流	22
2.7 数値実験条件	23
第3章 初期条件の違いによる準定常解の分布の違い	25
3.1 目的	25
3.2 比較対象とする物理実験	25
3.3 数値実験条件	26
3.4 数値実験結果および考察	26
第4章 アスペクト比が小さい場合の準定常解分布と分岐現象	34
4.1 目的	34
4.2 数値実験条件	34
4.3 数値実験結果および考察	34
4.3.1 定常なモードの分布	34
4.3.2 非定常モードの運動	35
4.3.3 モード間の分岐	36

第 5 章	静止状態からの増速率の違いによるモード形成過程	48
5.1	目的	48
5.2	数値実験条件	48
5.3	数値実験結果および考察	48
第 6 章	結論	60
第 7 章	謝辞	61

# 第1章 諸論

## 1.1 研究の意義と目的

回転二重円筒間の流れは、内円筒周速度を零から徐々に増加させると、まずクエット流が現われ、さらに加速するとセルと呼ばれるトーラス状の流れが幾重にも重なって現われるテイラー渦流れ、波動テイラー渦流れ、乱流へと遷移していく。テイラー渦流れはジャーナル軸受や様々な流体機械、化学反応容器などに現われる流れであり、その解明は工学上有用である。特にそのモード変化はトルクや反応速度の非定常な変化をもたらす、その予測、制御は重要である。テイラー渦の模式図を図 1.1 に示す。

Taylor は流れの安定性という見地からこの流れを理論的、実験的に研究した [16]。その後 Benjamin らは、それまでは円筒端面の流れに及ぼす影響を無視するため円筒は無限に長いとして扱われてきたこの分野に円筒端面の影響を取り入れ、円筒高さの円筒管すき間に対する比であるアスペクト比の影響により流れが複雑に変化することを分岐理論と物理実験から示した [3]。また彼らは、主モード、二次正規モード、二次変異モードの存在を確かめている。主モードとはレイノルズ数をゼロから準静的に増加させた場合に最初に生ずるモードである。二次モードとはレイノルズ数ある値まで急激に増加させた場合に生ずるモードである。正規モードとは固定端において円筒端面で外円筒から内円筒への流れを持つ正規セル渦が現われるモードである。変異モードとは片側端面、または両端面で正規モードとは逆の流れである内円筒から外円筒への流れを持つ変異セル渦が現われるモードである。円筒端面の影響を表現するため、Schaeffer はホモトピーパラメータ  $\tau$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ ) を摂動的に導入した [15]。 $\tau = 0$  が無限長円筒 (準周期的境界条件) を表し、 $\tau = 1$  が固定端条件を表している。Bolstad と Keller はこの  $\tau$  を計算に取り入れ、変異セルモードの円筒端面近傍での流れの方向を調べ、変異セルと円筒端面の間には隠れた渦が存在し、円筒端面近傍では Benjamin が述べているような内円筒から外円筒への流れは存在しないと主張している [5]。

有限長のテイラー渦を支配する主要パラメータはアスペクト比、レイノルズ数である。アスペクト比とレイノルズ数の組合せにより様々なモードのテイラー渦が現われることが実験的に示されている [10] [17] [19]。多くのテイラー渦流れの研究が無限、あるいは中程度のアスペクト比を対象としている一方、アスペクト比 1 付近の場合に注目した研究もいくつか報告されている。このアスペクト比 1 付近の流れでは Benjamin と Mullin がレイノルズ数とアスペクト比をパラメータとする空間で定常流が正規 2 セルモードおよび変異 1 セルモードとなる領域を求めている [3]。Cliffe は定常支配方程式に基づく有限要素法解析により対称 2 セルと非対称 1 セルの流れが現れる境界を決定している [6]。Pfister らは同様な境界を非定常式に基づき予測しているとともに、低レイノルズ数では非対称 1 セルに

かわり、対称 2 セルが現れることを見出している [14]。戸谷らは詳細な物理実験を行い、変異モードが持つエクストラ渦と、エクストラ渦が発達したツイン渦が存在することを実験的に示している [23]。これらの実験的事実に対して、レイノルズ数が変化する非定常過程でテイラー渦流れのモード変化を調べた数値的な予測は十分に行われていない。

回転二重管の流れに生じるテイラー渦について数値的に調べた研究の多くは定常状態に注目したものである。現在のテイラー渦流れの研究は大きく分けて 2 つの見地からのものがある。一つは乱流への遷移が段階的であることから、カオスへの過程を理論的、実験的に調べるものである。他方は非線形問題として分岐理論に主眼をおいた研究であり、これはテイラー渦が非一意性を容易に観測できることに起因している。非一意性とはアスペクト比、レイノルズ数という物理条件が同じであっても、その形成条件の違いによりいくつも安定しうる状態が存在することである。この非一意性に関連して、レイノルズ数の増加割合の違いによるモードの発生過程について調べた研究がいくつかある。東らは主モード 2 セルと二次モード 4 セルの発生機構を明らかにしているが、一般性を持った主モードと二次モードの発生機構の違いを解明するには至っていない [20]。また Bielek と Koschmieder は多数回の実験を行っているが、モード発生確率やモード形成過程の詳細は十分に観測されていない [4]。

以上のようなこれまでの研究を踏まえ、本研究は有限長の両端固定端とした回転二重円筒間に生じるテイラー渦の特徴を数値実験により明らかにし、その非一意的なモード形成メカニズムを対象とする。特にこれまでに注目されている、

- (1) 1 のオーダのアスペクト比における急増速のモード形成
- (2) 1 のオーダのアスペクト比における減速に伴うモード変化
- (3) アスペクト比を固定した場合に、静止状態から順次増速した時のモード形成を解明することを目的とする。

## 1.2 本研究の概要

第 2 章では本計算の計算系、計算手法を解説する。

第 3 章では初期条件を厳密クエット流、静止流体として、流れが十分発達した時現れるモードを求め、前田の研究により得られている、初期条件を線形近似クエット流とした場合の結果と比較し、相違点を明らかにする。

第 4 章ではアスペクト比が 1 近傍という非常に小さい場合において、流れが十分発達した時生ずるモードを調べ、ツインセルモードを含めた実験的に存在が示されているモードについて、その存在を数値的に確認する。また、内円筒周速度を減少させることにより、流れが他のモードへ分岐するメカニズムを解明する。

第 5 章ではテイラー渦の非一意性について、内円筒速度の増速率を変えることによって様々なモードが現れることを確かめ、増速率と形成されるモードの関係について調べる。さらに、生じた各モードの状態を運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクを用いて定量的に比較する。

第 6 章では本研究の結論を示す。

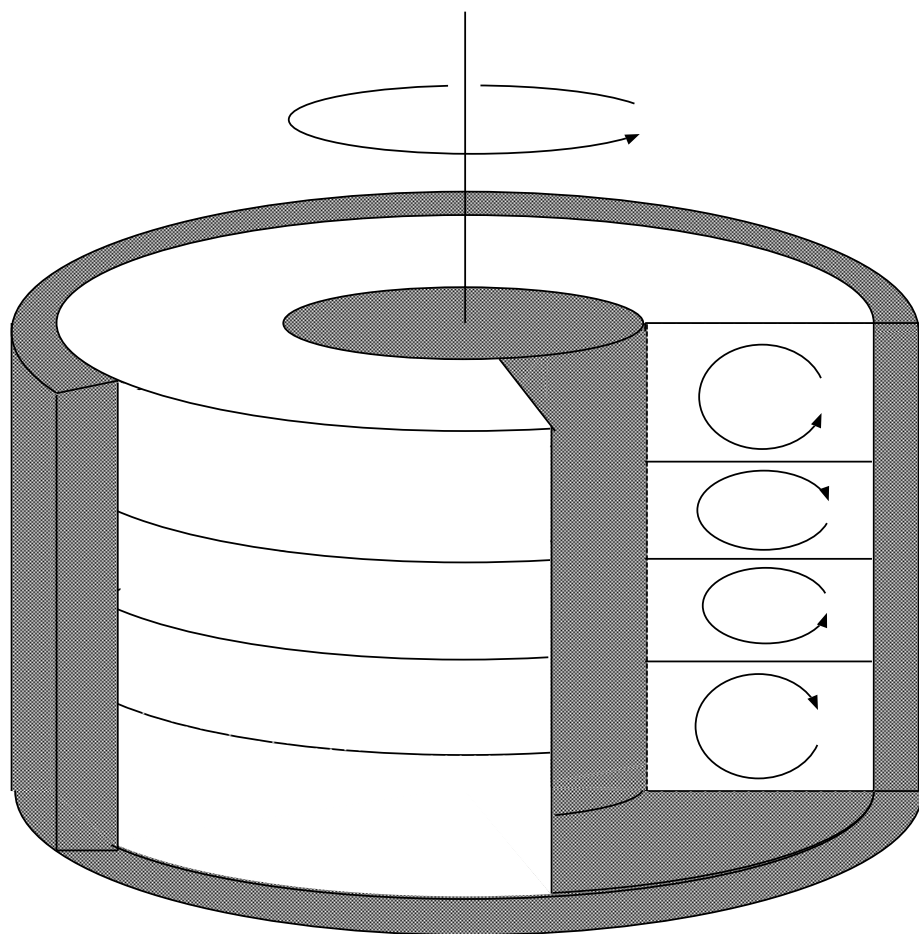


図 1.1: テイラー渦流れの模式図

## 第2章 数値計算手法

### 2.1 主な記号

本論文で使用される記号の一覧

$r_{in}$	:	内側回転円筒管半径 ( $m$ )
$r_{out}$	:	外側固定円筒管半径 ( $m$ )
$D_c = r_{out} - r_{in}$	:	内外円筒管の隙間 ( $m$ )
$\eta = r_{in}/r_{out}$	:	半径比 (-)
$r_{in}^* = r_{in}/L$	:	無次元内側回転円筒管半径 (-)
$r_{out}^* = r_{out}/L$	:	無次元外側固定円筒管半径 (-)
$D_c^* = D_c/L$	:	無次元化内外円筒管の隙間 (-)
$z_{up}$	:	円筒管軸方向上面 ( $m$ )
$z_{low}$	:	円筒管軸方向底面 ( $m$ )
$H = z_{up} - z_{low}$	:	作動流体の円筒管軸方向高さ ( $m$ )
$z_{up}^* = z_{up}/L$	:	無次元円筒管軸方向上面 (-)
$z_{low}^* = z_{low}/L$	:	無次元円筒管軸方向底面 (-)
$H^* = H/L$	:	無次元化した作動流体円筒管軸方向高さ (-)
$U$	:	代表的な速度 ( $m/s$ ) ( $= \omega r_{in}$ )
$L$	:	代表的な長さ ( $m$ ) ( $= D_c$ )
$p$	:	圧力 ( $Pa$ )
$p^* = p/\rho U^2$	:	無次元圧力 (-)
$\mathbf{u}$	:	速度ベクトル ( $m/s$ )
$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}/U$	:	無次元速度ベクトル (-)
$u^*$	:	$r$ 方向の無次元速度成分 (-)
$v^*$	:	$\theta$ 方向の無次元速度成分 (-)
$w^*$	:	$z$ 方向の無次元速度成分 (-)
$t$	:	時間 ( $s$ )
$t^* = tU/L$	:	無次元時間 (-)
$\Gamma = H/D_c$	:	アスペクト比 (-)
$Re = UL/\nu$	:	レイノルズ数 (-)
$\omega$	:	内円筒管の回転角速度 ( $rad/s$ )
$\rho$	:	密度 ( $g/m^3$ )
$\mu$	:	粘性率 ( $g/ms$ )
$\nu$	:	動粘度 ( $m^2/s$ )

$MR$	: $r$ 方向の格子点数
$MZ$	: $z$ 方向の格子点数
$\tau_{r\theta}$	: 内外円筒壁面上の $\theta$ 方向せん断応力 (-)
$\tau_{zr}$	: 上下壁面上の $r$ 方向せん断応力 (-)
$\tau_{\theta z}$	: 上下壁面上の $\theta$ 方向せん断応力 (-)
$N$	: 壁面に働くトルク (-)
$E$	: $\theta$ 断面面積平均運動エネルギー (-)
$\psi$	: 流れ関数 (-)
$T$	: 静止流体からの増速時間 (s)
$St = 2L/UT$	: 無次元加速パラメタ (-)

なお、以後全て無次元量で統一するため、無次元量記号中の \* は省略する。

## 2.2 支配方程式とその無次元化

非圧縮性粘性流体の支配方程式である連続の式と非保存系ナビエ・ストークス方程式 (NS 方程式) は以下のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

流体の支配方程式は上で述べた形そのまま解かれることもあるが、多くの場合、無次元化を行ってから解かれる。無次元化の利点として、例えば、流れを特徴づけるパラメータが複数個ある場合に、それぞれのパラメータを他のパラメータと独立に変化させることができる。また、無次元化された変数はあらかじめ決められた範囲 (たとえば、0 と 1 の間) に値をおさえることができる。以下に本研究における無次元化の手続きを示す。

流れを特徴づける代表的な長さを  $L$ 、代表的な速度を  $U$  とすると各物理量に関して以下のような無次元量を得ることができる。

$$\begin{aligned} \text{座標値} &: r^* = \frac{r}{L} & z^* = \frac{z}{L} \\ \text{速度} &: \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U} \\ \text{圧力} &: p^* = \frac{p}{\rho U^2} \\ \text{時間} &: t^* = t \frac{U}{L} \\ \text{レイノルズ数} &: Re = \frac{UL}{\nu} \end{aligned}$$

なお本研究では、代表的な長さとして内外円筒管の隙間 ( $L = D_c$ )、代表的な速度として、1つの非定常計算中で達成される最大の内円筒管の速度 ( $U = \omega r_{in}$ ) を用いている。レ



イノルズ数 ( $Re$ ) は非圧縮性粘性流体の運動を支配するパラメータであり、物理的には慣性力と粘性力との比という意味を持つ。これらの無次元量を前述の有次元量を用いた支配方程式に導入すると以下ようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \quad (2.3)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (2.4)$$

上の無次元化した方程式を本研究の支配方程式として用いる。また以後全て無次元量で統一するため、記号中の \* は省略することにする。

本研究では、研究対象を回転二重円筒管におけるテイラー渦流れとしていることから軸対称を仮定する。そのため、以下の各方程式における  $\theta$  方向の各物理量の変化は無いものとする。軸対称を仮定しても結果に影響を与えないことは十分確認してある。

## 2.3 MAC法

本研究では、支配方程式を有限差分法によって離散化する。離散化の手法はMAC (Marker and Cell method) 法に基づく。MAC法の長所は速度、圧力について直接NS方程式を解いているため、3次元問題にもそのまま適用できること、境界条件が課しやすいことなどである。その反面、連続の式が近似的にしか満たされないこと、圧力のポアソン方程式がノイマン条件になっているため、反復法で解く場合に一般に収束が遅いなどの欠点がある。

本研究における流れの支配方程式はNS方程式 (2.3) および連続の式 (2.4) である。

回転二重円筒管流れの系の基礎式を立てるにあたっては、その形状から円筒座標系 ( $r, \theta, z$ ) を採用した。計算系の概略図を図2.1に示す。

円筒座標系におけるNS方程式の各成分表示は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \underbrace{\frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}}_{=0} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}_{=0} - \underbrace{\frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \underbrace{\frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}}_{=0} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \\ & = -\frac{1}{r} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial \theta}}_{=0} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}}_{=0} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \underbrace{\frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}}_{=0} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

NS 方程式は速度について時間発展形になっている。そこで、時間微分項をオイラー陽解法によって近似すると、時刻  $n + 1$  の速度は、時刻  $n$  での速度と圧力を用いて次のように表される。

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left( -u \frac{\partial u}{\partial r} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{(v)^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right)^n \quad (2.8)$$

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t \left( -u \frac{\partial v}{\partial r} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right)^n \quad (2.9)$$

$$w^{n+1} = w^n + \Delta t \left( -u \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right)^n \quad (2.10)$$

圧力に関しては常に連続の式を満たしながら決定される必要がある。そこで NS 方程式に連続の式の効果を含め、さらに次の時間ステップで常に連続の式を満足させる条件を付け加えることにより、以下のような圧力に関するポアソン方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}}_{=0} + \frac{\partial p}{\partial z^2} \\ & = - \left( \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta}}_{=0} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + 2 \frac{u}{r^2} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \theta}}_{=0} + 2 \frac{1}{r} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial r}}_{=0} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial r} + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial z} \underbrace{\frac{\partial w}{\partial \theta}}_{=0} - 2 \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u^2}{r^2} \right) \\ & \quad - \underbrace{\left( \frac{\partial D}{\partial t} - u \frac{\partial D}{\partial r} - \frac{v}{r} \underbrace{\frac{\partial D}{\partial \theta}}_{=0} - w \frac{\partial D}{\partial z} \right)}_{D \text{ の対流項}} + \underbrace{\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial D}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{\partial^2 D}{\partial \theta^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} \right)}_{\text{粘性項}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここで  $D$  は次のように定義する。

$$D = \text{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \theta}}_{=0} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.12)$$

$D$  はもともと小さい量であるので圧力方程式中の  $D$  を含む項のなかで  $\partial D / \partial t$  だけが圧倒的に大きいと考えられる。したがって、この圧力方程式中の粘性項および  $D$  の対流項は無視する。

式 (2.11) を反復法などを用いて解くことにより、ある時刻  $n$  での速度  $u^n, v^n, w^n$  から圧力  $p^n$  が決まる。それらの値を式 (2.8)(2.9)(2.10) に代入することにより、次の時間ステップ  $n + 1$  での速度  $u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}$  を得ることができる。この一連の計算を繰り返し行うことにより時間進展していく。

以上の方程式を基礎式として用いて計算を行なう。

## 2.4 格子の配置

本研究では計算格子としてスタガード格子を用いている。スタガード格子とは、速度の各成分および圧力の評価点を同一にせず、圧力の評価点から、 $u$  は  $r$  方向に、 $v$  は  $\theta$  方向に、 $w$  は  $z$  方向にそれぞれ半格子ずらした点で評価する格子のとり方のことである。スタガード格子では、1つの格子単位ごとに連続の式が評価でき、さらに、ある方向の圧力差がその方向の速度を決めるといふ、NS 方程式の構造を自然に表現できるという長所がある。その反面、境界上に同時にすべての物理量を置くことができないといった欠点もある。なお、評価点以外の点での物理量が必要である場合は、適当に平均値による置き換えを行っている。以下の式中の添字  $i, k$  は、それぞれ  $r$  方向、 $z$  方向の圧力格子点を示している。

本研究における格子の取り扱い方を以下に示す。

### ・固体壁面

$$\begin{aligned} \text{内側壁面} &: i = 1/2 & r_{1/2} = r_{in} \\ \text{外側壁面} &: i = MR - 1/2 & r_{MR-1/2} = r_{out} \\ \text{下側壁面} &: k = 1/2 & z_{1/2} = z_{low} \\ \text{上側壁面} &: k = MZ - 1/2 & z_{MZ-1/2} = z_{up} \end{aligned}$$

### ・格子変数

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,k} & 0 \leq i \leq MR - 1, \quad 0 \leq k \leq MZ \\ v_{i,k} & 0 \leq i \leq MR, \quad 0 \leq k \leq MZ \\ w_{i,k+1/2} & 0 \leq i \leq MR, \quad 0 \leq k \leq MZ - 1 \\ p_{i,k} & 0 \leq i \leq MR, \quad 0 \leq k \leq MZ \end{aligned}$$

### ・支配方程式

$$\begin{aligned} u \text{ の式} & (i + 1/2, k) \text{ 中心} \\ v \text{ の式} & (i, k) \text{ 中心} \\ w \text{ の式} & (i, k + 1/2) \text{ 中心} \\ p \text{ の式} & (i, k) \text{ 中心} \end{aligned}$$

## 2.5 境界条件

### 2.5.1 速度境界条件

#### 壁面速度成分の条件

- 内側壁面 (1/2,k)

$$\begin{aligned} u_{1/2,k} &= 0 \\ v_{0,k} + v_{1,k} &= 2u_{in} \\ w_{0,k+1/2} + w_{1,k+1/2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{付帯条件} : u_{-1/2,k} = u_{3/2,k}$$

- 外側壁面 (MR-1/2,k)

$$\begin{aligned} u_{MR-1/2,k} &= 0 \\ v_{MR-1,k} + v_{MR,k} &= 2u_{out} \\ w_{MR-1,k+1/2} + w_{MR,k+1/2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{付帯条件} : u_{MR+1/2,k} = u_{MR-3/2,k}$$

- 下側壁面 (i,1/2)

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,0} + u_{i+1/2,1} &= 0 \\ v_{i,0} + v_{i,1} &= 0 \\ w_{i,1/2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{付帯条件} : w_{i,-1/2} = w_{i,3/2}$$

- 上側壁面 (i,MZ-1/2)

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,MZ-1} + u_{i+1/2,MZ} &= 0 \\ v_{i,MZ-1} + v_{i,MZ} &= 0 \\ w_{i,MZ-1/2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{付帯条件} : w_{i,MZ+1/2} = w_{i,MZ-3/2}$$

なお、ここに示されている付帯条件とは、離散化を行う場合に必要となる領域外の仮想点に対する条件である。

## 2.5.2 圧力境界条件

圧力の境界条件は、速度の境界条件を NS 方程式に代入することにより求まる。

- 内外壁面における Neuman 型圧力境界条件

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial r} - w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{v^2}{r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.13)$$

内外壁面において

$$u = w = 0, \quad v = \text{一定} \quad (2.14)$$

$$D = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.15)$$

を考慮すると、

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.16)$$

であるから

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v^2}{r} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad [\text{内外壁面における圧力境界条件}] \quad (2.17)$$

・ 内側壁面:  $(1/2, k)$  中心

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\Delta r} (p_{1,k} - p_{0,k}) \quad (2.18)$$

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{r_{1/2}} v_{in}^2 \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{1}{Re \cdot \Delta r^2} (u_{3/2,k} - 2u_{1/2,k} + \underbrace{u_{-1/2,k}}_{=u_{3/2,k}}) \\ &= \frac{2}{Re \cdot \Delta r^2} (u_{3/2,k} - \underbrace{u_{1/2,k}}_{=0}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

・ 外側壁面:  $(MR - 1/2, k)$  中心

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\Delta r} (p_{MR,k} - p_{MR-1,k}) \quad (2.21)$$

$$\frac{v}{r} = \frac{1}{r_{MR-1/2}} u_{out}^2 \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{2}{Re \cdot \Delta r^2} (u_{MR-3/2,k} - \underbrace{u_{MR-1/2,k}}_{=0}) \quad (2.23)$$

● 上下壁面における Neuman 型圧力境界条件

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.24)$$

上下壁面において

$$u = v = w = 0 \quad (2.25)$$

$$D = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.26)$$

を考慮すると、

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (2.27)$$

よって、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad [\text{上下壁面における圧力境界条件}] \quad (2.28)$$

・ 下側壁面:  $(i, 1/2)$  中心

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\Delta z} (p_{i,1} - p_{i,0}) \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \frac{1}{Re} \frac{1}{\Delta z^2} (w_{i,3/2} - 2w_{i,1/2} + \underbrace{w_{i,-1/2}}_{=w_{i,3/2}}) \\ &= \frac{2}{Re \cdot \Delta z^2} (w_{i,3/2} - \underbrace{w_{i,1/2}}_{=0}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

・ 上側壁面:  $(i, MZ - 1/2)$  中心

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\Delta z} (p_{i,MZ} - p_{i,MZ-1}) \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{2}{Re \cdot \Delta z^2} (w_{i,MZ-3/2} - \underbrace{w_{i,MZ-1/2}}_{=0}) \quad (2.32)$$

• Dirichlet 型圧力境界条件

圧力に関するポアソン方程式を解く際、反復解法の安定のために、どこか一点で圧力を指定する必要があるが、本数値実験では以下のように定める。

$$p_{0,MZ/2} = 0 \quad (2.33)$$

## 2.6 支配方程式の離散化

### 2.6.1 運動方程式

$Re$  が大きい場合の流れを粗い格子を用いて計算する場合、微分方程式の空間微分項を離散化する方法として中心差分を用いると数値的に不安定になることが知られている。そのような場合でも、上流差分を使えば安定に計算できる場合がある。そこで、本研究の数値実験用プログラムは、NS 方程式の離散化法として対流項には上流差分 (QUICK スキーム)、その他の項には中心差分を用いている。

NS 方程式の空間微分項に関する離散化

• 運動方程式- $u$  成分:  $(i + 1/2, k)$  中心

$$u^{n+1} = u_{i+1/2,k}^{n+1} \quad (2.34)$$

(以下の項の  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、 $p$  は全て時刻  $n$ )

$$u^n = u_{i+1/2,k} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} u^n \frac{\partial u^n}{\partial r} &= u_{i+1/2,k} \frac{1}{16\Delta r} (u_{i-3/2,k} - 10u_{i-1/2,k} + 10u_{i+3/2,k} - u_{i+5/2,k}) \\ &\quad + |u_{i+1/2,k}| \frac{1}{16\Delta r} (u_{i-3/2,k} - 4u_{i-1/2,k} + 6u_{i+1/2,k} - 4u_{i+3/2,k} + u_{i+5/2,k}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} w^n \frac{\partial u^n}{\partial z} &= w_{i+1/2,k} \frac{1}{16\Delta z} (u_{i+1/2,k-2} - 10u_{i+1/2,k-1} + 10u_{i+1/2,k+1} - u_{i+1/2,k+2}) \\ &\quad + |w_{i+1/2,k}| \frac{1}{16\Delta z} (u_{i+1/2,k-2} - 4u_{i+1/2,k-1} + 6u_{i+1/2,k} - 4u_{i+1/2,k+1} + u_{i+1/2,k+2}) \\ &= \frac{1}{4} (w_{i,k-1/2} + w_{i,k+1/2} + w_{i+1,k-1/2} + w_{i+1,k+1/2}) \\ &\quad \cdot \frac{1}{16\Delta z} (u_{i+1/2,k-2} - 10u_{i+1/2,k-1} + 10u_{i+1/2,k+1} - u_{i+1/2,k+2}) \\ &\quad + \frac{1}{4} |w_{i,k-1/2} + w_{i,k+1/2} + w_{i+1,k-1/2} + w_{i+1,k+1/2}| \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{1}{16\Delta z} (u_{i+1/2,k-2} - 4u_{i+1/2,k-1} + 6u_{i+1/2,k} - 4u_{i+1/2,k+1} + u_{i+1/2,k+2}) \quad (2.37)$$

$$\frac{(v^n)^2}{r} = \frac{1}{r_{i+1/2}} \frac{1}{4} (v_{i,k} + v_{i+1,k})^2 \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial p^n}{\partial r} = \frac{1}{\Delta r} (p_{i+1,k} - p_{i,k}) \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 u^n}{\partial r^2} = \frac{1}{\Delta r^2} (u_{i+3/2,k} - 2u_{i+1/2,k} + u_{i-1/2,k}) \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u^n}{\partial r} = \frac{1}{r_{i+1/2}} \frac{1}{2\Delta r} (u_{i+3/2,k} - u_{i-1/2,k}) \quad (2.41)$$

$$\frac{u^n}{r^2} = \frac{u_{i+1/2,k}}{r_{i+1/2}^2} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 u^n}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta z^2} (u_{i+1/2,k+1} - 2u_{i+1/2,k} + u_{i+1/2,k-1}) \quad (2.43)$$

上の差分式の適用範囲

$$2 \leq i \leq MR - 3$$

$$2 \leq k \leq MZ - 2$$

境界近傍の差分式のための付加条件

$$i = 1 \quad : \quad u_{-1/2,k} = u_{3/2,k}$$

$$i = MR - 2 \quad : \quad u_{MR+1/2,k} = u_{MR-3/2,k}$$

$$k = 1 \quad : \quad w \frac{\partial u}{\partial z} = w_{i+1/2,1} \frac{1}{2\Delta z} (u_{i+1/2,2} - \underbrace{u_{i+1/2,0}}_{=-u_{i+1/2,1}})$$

$$= \frac{w_{i+1/2,1}}{2\Delta z} (u_{i+1/2,2} + u_{i+1/2,1})$$

$$k = MZ - 1 \quad : \quad w \frac{\partial u}{\partial z} = w_{i+1/2,MZ-1} \frac{1}{2\Delta z} (\underbrace{u_{i+1/2,MZ}}_{=-u_{i+1/2,MZ-1}} - u_{i+1/2,MZ-2})$$

$$= \frac{w_{i+1/2,MZ-1}}{2\Delta z} (-u_{i+1/2,MZ-1} - u_{i+1/2,MZ-2})$$

● 運動方程式- $v$ 成分:  $(i, k)$  中心

$$v^{n+1} = v_{i,k}^{n+1} \quad (2.44)$$

(以下の項の  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、 $p$  は全て時刻  $n$ )

$$v^n = v_{i,k} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} u^n \frac{\partial v^n}{\partial r} &= u_{i,k} \frac{1}{16\Delta r} (v_{i-2,k} - 10v_{i-1,k} + 10v_{i+1,k} - v_{i+2,k}) \\ &\quad + |u_{i,k}| \frac{1}{16\Delta r} (v_{i-2,k} - 4v_{i-1,k} + 6v_{i,k} - 4v_{i+1,k} + v_{i+2,k}) \\ &= \frac{1}{2} (u_{i-1/2,k} + u_{i+1/2,k}) \\ &\quad \cdot \frac{1}{16\Delta r} (v_{i-2,k} - 10v_{i-1,k} + 10v_{i+1,k} - v_{i+2,k}) \\ &\quad + \frac{1}{2} |u_{i-1/2,k} + u_{i+1/2,k}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{1}{16\Delta r} (v_{i-2,k} - 4v_{i-1,k} + 6v_{i,k} - 4v_{i+1,k} + v_{i+2,k}) \\
w^n \frac{\partial v}{\partial z} &= w_{i,k} \frac{1}{16\Delta z} (v_{i,k-2} - 10v_{i,k-1} + 10v_{i+1,k} - v_{i+2,k}) \\
& + |w_{i,k}| \frac{1}{16\Delta z} (v_{i,k-2} - 4v_{i,k-1} + 6v_{i,k} - 4v_{i+1,k} + v_{i+2,k}) \\
&= \frac{1}{2} (w_{i,k-1/2} + w_{i,k+1/2}) \\
& \cdot \frac{1}{16\Delta z} (v_{i,k-2} - 10v_{i,k-1} + 10v_{i+1,k} - v_{i+2,k}) \\
& + \frac{1}{2} |w_{i,k-1/2} + w_{i,k+1/2}| \\
& \cdot \frac{1}{16\Delta z} (v_{i,k-2} - 4v_{i,k-1} + 6v_{i,k} - 4v_{i+1,k} + v_{i+2,k})
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
\frac{u^n v^n}{r} &= \frac{1}{r_i} (u_{i,k} v_{i,k}) \\
&= \frac{1}{r_i} \frac{1}{2} (u_{i-1/2,k} + u_{i+1/2,k}) v_{i,k} \\
\frac{\partial^2 v^n}{\partial r^2} &= \frac{1}{\Delta r^2} (v_{i+1,k} - 2v_{i,k} + v_{i-1,k}) \\
\frac{1}{r} \frac{\partial v^n}{\partial r} &= \frac{1}{r_i} \frac{1}{2\Delta r} (v_{i+1,k} - v_{i-1,k}) \\
\frac{v^n}{r^2} &= \frac{v_{i,k}}{r_i^2} \\
\frac{\partial^2 v^n}{\partial z^2} &= \frac{1}{\Delta z^2} (v_{i,k+1} - 2v_{i,k} + v_{i,k-1})
\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r_i} (u_{i,k} v_{i,k}) \\
&= \frac{1}{r_i} \frac{1}{2} (u_{i-1/2,k} + u_{i+1/2,k}) v_{i,k}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial^2 v^n}{\partial r^2} = \frac{1}{\Delta r^2} (v_{i+1,k} - 2v_{i,k} + v_{i-1,k}) \tag{2.49}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v^n}{\partial r} = \frac{1}{r_i} \frac{1}{2\Delta r} (v_{i+1,k} - v_{i-1,k}) \tag{2.50}$$

$$\frac{v^n}{r^2} = \frac{v_{i,k}}{r_i^2} \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial^2 v^n}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta z^2} (v_{i,k+1} - 2v_{i,k} + v_{i,k-1}) \tag{2.52}$$

上の差分式の適用範囲

$$\begin{aligned}
2 &\leq i \leq MR - 2 \\
2 &\leq k \leq MZ - 2
\end{aligned}$$

境界近傍の差分式のための付加条件

$$\begin{aligned}
i = 1 & : u \frac{\partial v}{\partial r} = u_{1,k} \frac{1}{2\Delta r} (v_{2,k} - v_{0,k}) \\
i = MR - 1 & : u \frac{\partial v}{\partial r} = u_{MR-1,k} \frac{1}{2\Delta r} (v_{MR,k} - v_{MR-2,k}) \\
k = 1 & : w \frac{\partial v}{\partial z} = w_{i,1} \frac{1}{2\Delta z} (v_{i,2} - \underbrace{v_{i,0}}_{=-v_{i,1}}) \\
& = w_{i,1} \frac{1}{2\Delta z} (v_{i,2} + v_{i,1}) \\
k = MZ - 1 & : w \frac{\partial v}{\partial z} = w_{i,MZ-1} \frac{1}{2\Delta z} (v_{i,MZ} - v_{i,MZ-2})
\end{aligned}$$

● 運動方程式- $w$ 成分:  $(i, k + 1/2)$  中心

$$\begin{aligned}
w^{n+1} &= w_{i,k+1/2}^{n+1} \\
& \text{(以下の項の } u, v, w, p \text{ は全て時刻 } n)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$w^n = w_{i,k+1/2} \tag{2.54}$$



$$\begin{aligned}
w^n \frac{\partial w^n}{\partial r} &= u_{i,k+1/2} \frac{1}{16\Delta r} \left( w_{i-2,k+1/2} - 10w_{i-1,k+1/2} + 10w_{i+1,k+1/2} - w_{i+2,k+1/2} \right) \\
&\quad + \left| u_{i,k+1/2} \right| \frac{1}{16\Delta r} \left( w_{i-2,k+1/2} - 4w_{i-1,k+1/2} + 6w_{i,k+1/2} - 4w_{i+1,k+1/2} + w_{i+2,k+1/2} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( u_{i-1/2,k} + u_{i-1/2,k+1} + u_{i+1/2,k} + u_{i+1/2,k+1} \right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{16\Delta r} \left( w_{i-2,k+1/2} - 10w_{i-1,k+1/2} + 10w_{i+1,k+1/2} - w_{i+2,k+1/2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left| u_{i-1/2,k} + u_{i-1/2,k+1} + u_{i+1/2,k} + u_{i+1/2,k+1} \right| \\
&\quad \cdot \frac{1}{16\Delta r} \left( w_{i-2,k+1/2} - 4w_{i-1,k+1/2} + 6w_{i,k+1/2} - 4w_{i+1,k+1/2} + w_{i+2,k+1/2} \right) \quad (2.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^n \frac{\partial w^n}{\partial z} &= w_{i,k+1/2} \frac{1}{16\Delta z} \left( w_{i,k-3/2} - 10w_{i,k-1/2} + 10w_{i,k+3/2} - w_{i,k+5/2} \right) \\
&\quad + \left| w_{i,k+1/2} \right| \frac{1}{16\Delta z} \left( w_{i,k-3/2} - 4w_{i,k-1/2} + 6w_{i,k+1/2} - 4w_{i,k+3/2} + w_{i,k+5/2} \right) \quad (2.56)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial p^n}{\partial z} = \frac{1}{\Delta z} (p_{i,k+1} - p_{i,k}) \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial^2 w^n}{\partial r^2} = \frac{1}{\Delta r^2} \left( w_{i+1,k+1/2} - 2w_{i,k+1/2} + w_{i-1,k+1/2} \right) \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w^n}{\partial r} = \frac{1}{r_i} \frac{1}{2\Delta r} \left( w_{i+1,k+1/2} - w_{i-1,k+1/2} \right) \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta z^2} \left( w_{i,k+3/2} - 2w_{i,k+1/2} + w_{i,k-1/2} \right) \quad (2.60)$$

上の差分式の適用範囲

$$\begin{aligned}
2 \leq i \leq MR - 2 \\
2 \leq k \leq MZ - 3
\end{aligned}$$

境界近傍の差分式のための付加条件

$$\begin{aligned}
i = 1 & : u \frac{\partial w}{\partial r} = u_{1,k+1/2} \frac{1}{2\Delta r} \left( w_{2,k+1/2} - w_{0,k+1/2} \right) \\
i = MR - 1 & : u \frac{\partial w}{\partial r} = u_{MR-1,k+1/2} \frac{1}{2\Delta r} \left( w_{MR,k+1/2} - w_{MR-2,k+1/2} \right) \\
k = 1 & : w_{i,-1/2} = w_{i,3/2} \\
k = MZ - 2 & : w_{i,MZ+1/2} = w_{i,MZ-3/2}
\end{aligned}$$

## 2.6.2 圧力方程式

圧力方程式:  $(i, k)$  中心

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{1}{\Delta r^2} (p_{i+1,k} - 2p_{i,k} + p_{i-1,k}) \quad (2.61)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r_i} \frac{1}{2\Delta r} (p_{i+1,k} - p_{i-1,k}) \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta z^2} (p_{i,k+1} - 2p_{i,k} + p_{i,k-1}) \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (D_{i,k}^{n+1} - D_{i,k}^n) \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial D}{\partial r} &= u_{i,k} \frac{1}{2\Delta r} (D_{i+1,k} - D_{i-1,k}) \\ &= \frac{1}{2} (u_{i-1/2,k} + u_{i+1/2,k}) \frac{1}{2\Delta r} (D_{i+1,k} - D_{i-1,k}) \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$w \frac{\partial D}{\partial z} = \frac{1}{2} (w_{i,k-1/2} + w_{i,k+1/2}) \frac{1}{2\Delta z} (D_{i,k+1} - D_{i,k-1}) \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\Delta r^2} (u_{i+1/2,k} - u_{i-1/2,k})^2 \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\Delta z^2} (w_{i,k+1/2} - w_{i,k-1/2})^2 \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial r} &= 2 \frac{1}{2\Delta z} (u_{i,k+1} - u_{i,k-1}) \frac{1}{2\Delta r} (w_{i+1,k} - w_{i-1,k}) \\ &= 2 \frac{1}{4\Delta z} (u_{i-1/2,k+1} + u_{i+1/2,k+1} - u_{i-1/2,k-1} - u_{i+1/2,k-1}) \\ &\quad \cdot \frac{1}{4\Delta r} (w_{i+1,k-1/2} + w_{i+1,k+1/2} - w_{i-1,k-1/2} - w_{i-1,k+1/2}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$2 \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2}{r_i} v_{i,k} \frac{1}{2\Delta r} (v_{i+1,k} - v_{i-1,k}) \quad (2.70)$$

$$\frac{u^2}{r^2} = \frac{1}{r_i^2} \frac{1}{4} (u_{i-1/2,k} + u_{i+1/2,k})^2 \quad (2.71)$$

また、上の差分式中に現れる  $D$  については以下の通りである。

$$D_{i,k} = \frac{1}{\Delta r} (u_{i+1/2,k} - u_{i-1/2,k}) + \frac{1}{r_i} \frac{1}{2} (u_{i+1/2,k} + u_{i-1/2,k}) + \frac{1}{\Delta z} (w_{i,k+1/2} - w_{i,k-1/2}) \quad (2.72)$$

ここで、未知量について整理しておく。

$$\begin{aligned} P_{i,k} &= p_{i-1,k} \left( \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{r_i} \frac{1}{2\Delta r} \right) + p_{i,k-1} \left( \frac{1}{\Delta z^2} \right) \\ &\quad + p_{i,k} \left( -\frac{2}{\Delta r^2} - \frac{2}{\Delta z^2} \right) \\ &\quad + p_{i,k+1} \left( \frac{1}{\Delta z^2} \right) + p_{i+1,k} \left( \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{1}{2\Delta r} \right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

### 2.6.3 各種物理量

本研究において用いる各種方程式の離散化を以下に示す。

- せん断応力

- ◇ 内外円筒壁面上の  $\theta$  方向せん断応力  $\tau_{r\theta}$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}}_{=0} \right) \quad (2.74)$$

・内筒壁面:  $(1/2, k)$  中心

$$\tau_{r\theta}|_{inner} = \mu r_{1/2} \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{1}{r_1} v_{1,k} - \frac{1}{r_0} v_{0,k} \right) \quad (2.75)$$

・外筒壁面:  $(MR - 1/2, k)$  中心

$$\tau_{r\theta}|_{outer} = \mu r_{MR-1/2} \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{1}{r_{MR}} v_{MR,k} - \frac{1}{r_{MR-1}} v_{MR-1,k} \right) \quad (2.76)$$

◇ 上下壁面上の  $r$  方向せん断応力  $\tau_{zr}$

$$\tau_{zr} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (2.77)$$

・下側壁面:  $(i, 1/2)$  中心

$$\begin{aligned} \tau_{zr}|_{lower} &= \frac{\mu}{\Delta z} (u_{i,1} - u_{i,0}) + \frac{\mu}{2\Delta r} \underbrace{(w_{i+1,1/2} - w_{i-1,1/2})}_{=0} \\ &= \frac{\mu}{2\Delta z} (u_{i-1/2,1} + u_{i+1/2,1} - u_{i-1/2,0} - u_{i+1/2,0}) \end{aligned} \quad (2.78)$$

・上側壁面:  $(i, MZ - 1/2)$  中心

$$\begin{aligned} \tau_{zr}|_{upper} &= \frac{\mu}{\Delta z} (u_{i,MZ} - u_{i,MZ-1}) + \frac{\mu}{2\Delta r} \underbrace{(w_{i+1,MZ-1/2} - w_{i-1,MZ-1/2})}_{=0} \\ &= \frac{\mu}{2\Delta z} (u_{i-1/2,MZ} + u_{i+1/2,MZ} - u_{i-1/2,MZ-1} - u_{i+1/2,MZ-1}) \end{aligned} \quad (2.79)$$

◇ 上下壁面上の  $\theta$  方向せん断応力  $\tau_{\theta z}$

$$\tau_{\theta z} = \mu \left( \frac{1}{r} \underbrace{\frac{\partial w}{\partial \theta}}_{=0} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.80)$$

・下側壁面:  $(i, 1/2)$  中心

$$\tau_{\theta z}|_{lower} = \frac{\mu}{\Delta z} (v_{i,1} - v_{i,0}) \quad (2.81)$$

・上側壁面:  $(i, MZ - 1/2)$  中心

$$\tau_{\theta z}|_{upper} = \frac{\mu}{\Delta z} (v_{i,MZ} - v_{i,MZ-1}) \quad (2.82)$$

## ● トルク

◇ 内外円筒壁面に働くトルク  $N$

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{2\pi} \int_{z_{lower}}^{z_{upper}} r \tau_{r\theta} r d\theta dz \\ &= 2\pi r^2 \int_{z_{lower}}^{z_{upper}} \tau_{r\theta} dz \end{aligned} \quad (2.83)$$

・ 内筒壁面:  $(1/2, k)$  中心

$$N|_{inner} = 2\pi r_{1/2}^2 \Delta z \sum_{k=1}^{MZ-1} \tau_{r\theta 1/2, k} \quad (2.84)$$

・ 外筒壁面:  $(MR - 1/2, k)$  中心

$$N|_{outer} = 2\pi r_{MR-1/2}^2 \Delta z \sum_{k=1}^{MZ-1} \tau_{r\theta MR-1/2, k} \quad (2.85)$$

◇ 上下壁面に働くトルク  $N$

$$\begin{aligned} N &= - \int_0^{2\pi} \int_{r_{inner}}^{r_{outer}} r \tau_{\theta z} r \, dr d\theta \\ &= -2\pi \int_{r_{inner}}^{r_{outer}} r^2 \tau_{\theta z} \, dr \end{aligned} \quad (2.86)$$

・ 下側壁面:  $(i, 1/2)$  中心

$$N|_{lower} = -2\pi \Delta r \sum_{i=1}^{MR-1} r_i^2 \tau_{\theta z i, 1/2} \quad (2.87)$$

・ 上側壁面:  $(i, MZ - 1/2)$  中心

$$N|_{upper} = -2\pi \Delta r \sum_{i=1}^{MR-1} r_i^2 \tau_{\theta z i, MZ-1/2} \quad (2.88)$$

●  $\theta$  断面面積平均運動エネルギー  $E$

$(i, k)$  点中心エネルギー  $e$  を用いて

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{A} \int_{r_{inner}}^{r_{outer}} \int_{z_{lower}}^{z_{upper}} e \, dr dz \\ &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{MR-1} \sum_{z=1}^{MZ-1} e_{i, k} \Delta r \Delta z \end{aligned} \quad (2.89)$$

ここで

$$A = \Delta r (MR - 1) \cdot \Delta z (MZ - 1) \quad (2.90)$$

$$e_{i, k} = \frac{1}{4} (u_{i+1/2, k}^2 + u_{i-1/2, k}^2) + \frac{1}{2} v_{i, k}^2 + \frac{1}{4} (w_{i, k+1/2}^2 + w_{i, k-1/2}^2) \quad (2.91)$$

●  $\theta$  断面面積平均エンストロフィ  $\Omega$

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{A} \int_{r_{inner}}^{r_{outer}} \int_{z_{lower}}^{z_{upper}} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \, dr dz \\ &= \frac{1}{A} \Delta r \Delta z \sum_{i=1}^{MR-1} \sum_{z=1}^{MZ-1} \left( \frac{u_{i+1/2, k} - u_{i-1/2, k}}{\Delta z} - \frac{w_{i, k+1/2} - w_{i, k-1/2}}{\Delta r} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.92)$$

• 流れ関数  $\psi$

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.93)$$

$$w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.94)$$

式 (2.93) の差分:  $(i, k - 1/2)$  中心

$$u_{i,k-1/2} = -\frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta z} (\psi_{i,k} - \psi_{i,k-1}) \quad (2.95)$$

式 (2.94) の差分:  $(i - 1/2, k)$  中心

$$w_{i-1/2,k} = \frac{1}{r_{i-1/2}} \frac{1}{\Delta r} (\psi_{i,k} - \psi_{i-1,k}) \quad (2.96)$$

壁面上では  $\psi = 0$  として、式 (2.93) (2.94) を各方向に積分する。

式 (2.93) の積分

◇  $k = 1$  から  $MZ - 1$  への積分  $\psi_A$

・  $k = 1$  のとき

$$\begin{aligned} u_{i,3/4} &= \frac{1}{2} \underbrace{(u_{i,1/2} + u_{i,1})}_{=0} \\ &= -\frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta z/2} (\psi_{i,1} - \underbrace{\psi_{i,1/2}}_{=0}) \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$u_{i,1} = \frac{1}{2} (u_{i+1/2,1} + u_{i-1/2,1}) \text{ を考慮すると}$$

$$\psi_{i,1} = -\frac{1}{8} r_i \Delta z (u_{i+1/2,1} + u_{i-1/2,1}) \quad (2.98)$$

・  $1 < k$  のとき

$$\begin{aligned} \psi_{i,k} &= \psi_{i,k-1} - r_i \Delta z u_{i,k-1/2} \\ &= \psi_{i,k-1} - \frac{r_i \Delta z}{4} (u_{i+1/2,k} + u_{i-1/2,k} + u_{i+1/2,k-1} + u_{i-1/2,k-1}) \end{aligned} \quad (2.99)$$

◇  $k = MZ - 1$  から  $1$  への積分  $\psi_B$

・  $k = MZ - 1$  のとき

$$u_{i,MZ-3/4} = \frac{1}{2} (u_{i,MZ-1} + \underbrace{u_{i,MZ-1/2}}_{=0})$$

$$= -\frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta z/2} \underbrace{(\psi_{i,MZ-1/2} - \psi_{i,MZ-1})}_{=0} \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} u_{i,MZ-1} &= \frac{1}{2} (u_{i+1/2,MZ-1} + u_{i-1/2,MZ-1}) \text{ を考慮すると} \\ \psi_{i,MZ-1} &= \frac{1}{8} r_i \Delta z (u_{i-1/2,MZ-1} + u_{i+1/2,MZ-1}) \end{aligned} \quad (2.101)$$

・  $k < MZ - 1$  のとき

$$\begin{aligned} \psi_{i,k} &= \psi_{i,k+1} + r_i \Delta z u_{i,k+1/2} \\ &= \psi_{i,k+1} + \frac{1}{4} r_i \Delta z (u_{i+1/2,k+1} + u_{i-1/2,k+1} + u_{i+1/2,k} + u_{i-1/2,k}) \end{aligned} \quad (2.102)$$

式 (2.94) の積分

◇  $i = 1$  から  $MR - 1$  への積分  $\psi_C$

・  $i = 1$  のとき

$$\begin{aligned} w_{3/4,k} &= \frac{1}{2} \underbrace{(w_{1/2,k} + w_{1,k})}_{=0} \\ &= \frac{1}{(r_{1/2} + r_1)/2} \frac{1}{\Delta r/2} (\psi_{1,k} - \underbrace{\psi_{1/2,k}}_{=0}) \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} w_{1,k} &= \frac{1}{2} (w_{1,k+1/2} + w_{1,k-1/2}) \text{ を考慮すると} \\ \psi_{1,k} &= \frac{1}{16} (r_{1/2} + r_1) \Delta r (w_{1,k+1/2} + w_{1,k-1/2}) \end{aligned} \quad (2.104)$$

・  $1 < i$  のとき

$$\begin{aligned} \psi_{i,k} &= \psi_{i-1,k} + r_{i-1/2} \Delta r w_{i-1/2,k} \\ &= \psi_{i-1,k} + \frac{1}{4} r_{i-1/2} \Delta r (w_{i,k+1/2} + w_{i,k-1/2} + w_{i-1,k+1/2} + w_{i-1,k-1/2}) \end{aligned} \quad (2.105)$$

◇  $i = MR - 1$  から  $1$  への積分  $\psi_D$

・  $i = MR - 1$  のとき

$$\begin{aligned} w_{MR-3/4,k} &= \frac{1}{2} (w_{MR-1,k} + \underbrace{w_{MR-1/2,k}}_{=0}) \\ &= \frac{1}{(r_{MR-1} + r_{MR-1/2})/2} \frac{1}{\Delta r/2} (\underbrace{\psi_{MR-1/2,k}}_{=0} - \psi_{MR-1,k}) \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} w_{MR-1,k} &= \frac{1}{2} (w_{MR-1,k+1/2} + w_{MR-1,k-1/2}) \text{ を考慮すると} \\ \psi_{MR-1,k} &= -\frac{1}{16} (r_{MR-1} + r_{MR-1/2}) \Delta r (w_{MR-1,k-1/2} + w_{MR-1,k+1/2}) \end{aligned} \quad (2.107)$$

・  $1 < MR - 1$  のとき

$$\begin{aligned}\psi_{i,k} &= \psi_{i+1,k} - r_{i+1/2} \Delta r w_{i+1/2,k} \\ &= \psi_{i+1,k} - \frac{1}{4} r_{i+1/2} \Delta r \left( w_{i+1,k+1/2} + w_{i+1,k-1/2} + w_{i,k+1/2} + w_{i,k-1/2} \right)\end{aligned}\quad (2.108)$$

各格子点で  $\psi_A$ 、 $\psi_B$ 、 $\psi_C$ 、 $\psi_D$  が求まる。より近い壁面からの積分値がより強く反映されるように影響係数を導入して、格子点  $(i, k)$  での流れ関数  $\psi_{i,k}$  を決定する。

$$\psi_{i,k} = \frac{1}{2} \left( \frac{(MZ - 1) - (k - 0.5)}{MZ - 1} \psi_A + \frac{k - 0.5}{MZ - 1} \psi_B + \frac{(MR - 1) - (i - 0.5)}{MR - 1} \psi_C + \frac{i - 0.5}{MR - 1} \psi_D \right)\quad (2.109)$$

## 2.6.4 厳密クエット流

軸対称定常ナビエ・ストークス方程式は次のように表される。

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}\quad (2.110)$$

$$\nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0\quad (2.111)$$

無限円筒  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$  として、式 (2.111) を変形する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \\ &= 0\end{aligned}\quad (2.112)$$

式 (2.112) を  $r$  方向に積分する。(  $C$  は積分定数 )

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = C\quad (2.113)$$

積分公式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)\quad (2.114)$$

の解は、

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)\quad (2.115)$$

を用いて、式 (2.113) の解を求めると、次のような厳密クエット流の周方向速度成分を表す式を得る。

$$v = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (2.116)$$

積分定数  $C_1, C_2$  は内外円筒境界条件より求められる。

$$v_{inner} = C_1 r_{inner} + \frac{C_2}{r_{inner}} \quad (2.117)$$

$$v_{outer} = C_1 r_{outer} + \frac{C_2}{r_{outer}} \quad (2.118)$$

この式を解くと、

$$C_1 = \left( \frac{v_{inner}}{r_{outer}} - \frac{v_{outer}}{r_{inner}} \right) / \left( \frac{r_{inner}}{r_{outer}} - \frac{r_{outer}}{r_{inner}} \right) \quad (2.119)$$

$$C_2 = (v_{inner} r_{outer} - v_{outer} r_{inner}) / \left( \frac{r_{outer}}{r_{inner}} - \frac{r_{inner}}{r_{outer}} \right) \quad (2.120)$$

## 2.7 数値実験条件

格子幅はそれぞれの方向に等間隔である一様格子を用いる。格子数は  $\Gamma \leq 1.6$  の場合は、 $MR = 80$ 、 $MZ$  は  $\Gamma = 1.0$  に対して 80 となるよう比例調整する。 $\Gamma \geq 2.6$  の場合は、 $\Gamma$  の値に応じて格子数を次のように変える。 $\Gamma = 2.6 \sim 3.4$  では  $MR = 41$ 、 $MZ = 122$ 、 $\Gamma = 3.6 \sim 4.4$  では  $MR = 41$ 、 $MZ = 162$ 、 $\Gamma = 4.6 \sim 5.4$  では  $MR = 41$ 、 $MZ = 202$ 、 $\Gamma = 5.6 \sim 6.4$  では  $MR = 41$ 、 $MZ = 242$ 、 $\Gamma = 6.6 \sim 7.4$  では  $MR = 41$ 、 $MZ = 282$  を用いる。時間刻みは有次元時間で 0.0002 秒とする。これらの格子数と時間刻みは計算結果に大きな影響を及ぼさない十分小さなものであることを確認している。

圧力のポアソン方程式の解法には SOR 法と ILUCGS 法を併用する。流れの変化が少ない場合、SOR 法は収束が早く有効な解法である一方で、ILUCGS 法は流れの変化が大きくても安定して収束する。そのため、SOR 法の反復回数がある一定の値を越えると ILUCGS 法に切替え、それ以降の数ステップを ILUCGS 法で計算し、再び SOR 法に戻すようにしている。

流れが十分に発達するまでの時間は本研究で対象とした全ての計算条件において、時間ステップあたりのトルク変動量が  $10^{-4}$  未満になる時間とする。

なお、分かりやすさのために、以下の図において  $z$  座標の表示には作動流体の軸方向高さで無次元化した値を用いる。また、図の左側が回転する内円筒側、右側が静止している外円筒側で、上が上側端面、下が下側端面を示す。



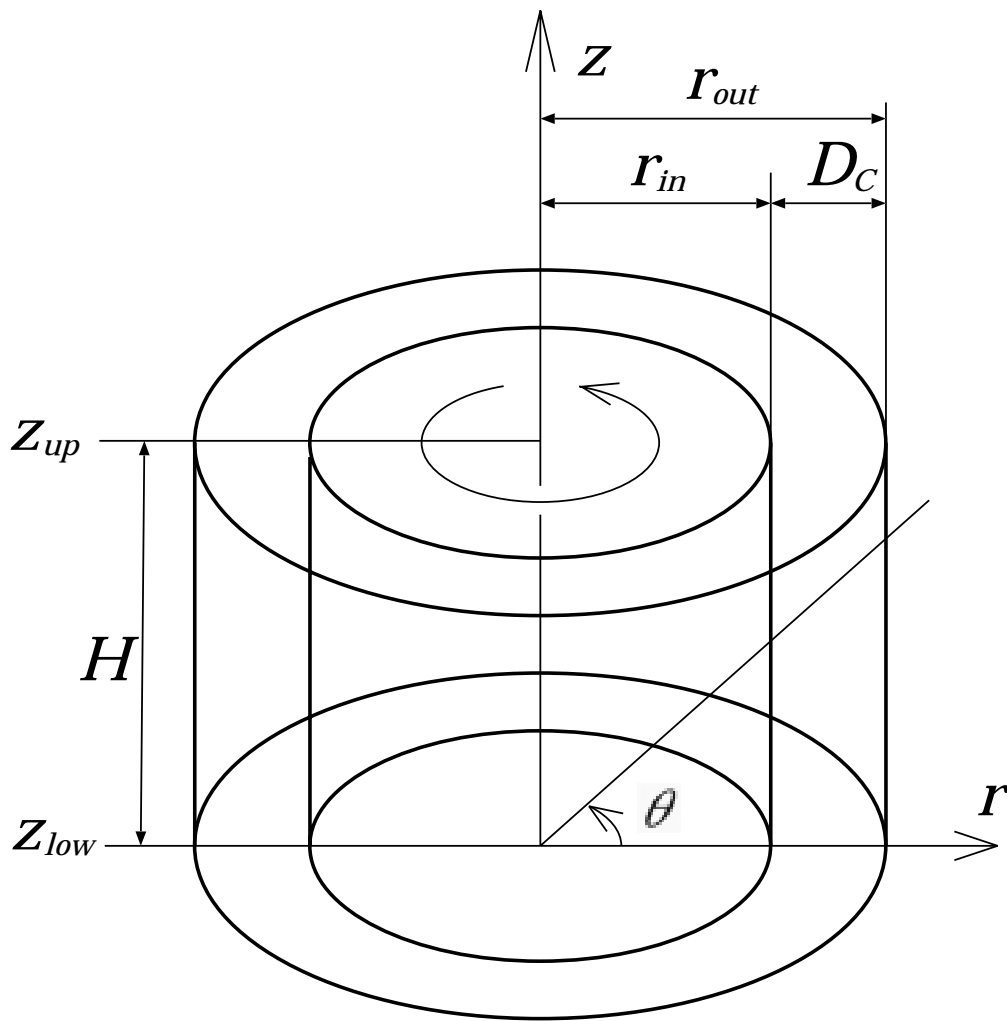


図 2.1: 計算系の概略図

# 第3章 初期条件の違いによる準定常解の分布の違い

## 3.1 目的

前田は初期条件として二重円筒間の流れがクエット流として計算している [29]。このクエット流は内円筒管速度を最大、外円筒速度ゼロを最小とした線形分布をしていると仮定している。前田はこの初期条件の下、流れが十分に発達した時現れるモードの分布について詳細に調べている。

しかし、実際にはクエット流の周方向速度は線形分布になっておらず、式 (2.116) に規定されるような定常ナビエ・ストークス方程式と連続式に支配された流れである。初期条件が結果に及ぼす影響は大きいと考えられ、可能な限り厳密な初期条件を与えることにより正確な現象の解明が可能である。本章においては厳密なクエット流を初期条件として与えることにより、より正確な結果を得ることを目的とする。

戸谷らの物理実験では、初期条件として静止流体を与えている。数値実験でも同じく静止流体を初期条件として与えることにより、より正確な物理実験との比較ができるようになる。

そこでこの章では、初期条件として (1) 定常ナビエ・ストークス方程式と連続式から求められる厳密なクエット流、(2) 静止流体、の2つの場合について、前田の研究により初期条件を線形近似クエット流として求められている、アスペクト比 2.6 から 7.2、レイノルズ数 50 から 1000 までの範囲について計算を行い、初期条件の違いによる準定常解の分布を調べる。

## 3.2 比較対象とする物理実験

本計算では計算結果を戸谷らの物理実験 [23] と比較する。彼らが実験に用いた装置は  $r_{in} = 20mm$ 、 $r_{out} = 30mm$ 、 $\eta = 0.667$  である。自由端、固定端の各条件下で、流れのモードの分類を示し、2次正規モードから主モードへ分岐するレイノルズ数の変化をアスペクト比に対して求め、2次モードの安定限界を明らかにしている。同様に変異モードから他の流れの状態へ分岐するレイノルズ数をアスペクト比に対して求め、変異モードの安定限界を明らかにしている。また、これらの結果を基に、複雑な流れの相互関係を流れの分岐図を用いて示している。

さらにアスペクト比が 0.5 ~ 4.6 と小さい場合のテイラー渦を観察し、変異モードの変異セルに付随するエクストラ渦と、エクストラ渦が発達して形成されるツイン渦の存在を確

かめている。

それらの結果を踏まえ、彼らはテイラー渦の非一意性に関連して、固定端の場合は  $\Gamma = 4.0$ 、自由端の場合は  $\Gamma = 4.9$  の条件において、内円筒増速率の違いによるモード形成過程を調べるため、無次元加速度パラメタであるストロハル数を導入し、レイノルズ数とストロハル数の変化に対する各モードの発生頻度を多数回の試行により実験的に調べている。

本計算は戸谷らによって物理実験的に調べられているこれらの現象を数値実験によって予測することで、結果を比較し、さらなる現象の解明を試みるものである。

### 3.3 数値実験条件

主な計算条件は第 2.7 節で述べたとおりである。初期条件として定常ナビエ・ストークス方程式と連続式から求められる厳密クエット流、全ての領域で  $u$ 、 $v$ 、 $w$  がゼロである静止状態の 2 つを与える。

### 3.4 数値実験結果および考察

まず比較のために、前田の研究で得られている、初期条件を線形近似クエット流とした場合の準定常解の分布を表 3.1 に示す。これは、アスペクト比を 2.6 から 7.2 まで 0.2 刻みで 24 個、レイノルズ数を 50 から 1000 まで 50 刻みで 20 個変化させ、定常に落ち着いた時に現れるテイラー渦のモード分布を示している。正規 2、4、6、8、10 セルモードの他に、変異 4、5、6 セルモードが現れている。図 3.1 に示される、戸谷らが詳細な物理実験によって得た流れの分岐図と比較すると、 $Re = 50$  の場合では全てのアスペクト比で主モードが現れている。しかし、 $\Gamma = 5.4$  では正規 8 セルモードは形成されず、 $\Gamma \geq 7.10$  の範囲では正規 10 セルモードは形成されないという 2 点で異なっている。前田の研究では、この準定常解の分布を基に、各モード間のモード変化の様子を観察している。そして、 $N + 2$  個のセルを持つ 2 次正規モードの流れが  $N$  個のセルを持つ主モードになる場合には、セル数の減少は、外円筒側から内円筒側への流れを境界を持つセルのペアの消滅により生じること、正規モードの分岐は必ずしも  $z$  方向中心について対称ではなく、非対称なかたちで分岐が起こり得ること、変異セルを持つ流れの遷移は、内円筒と外円筒の両側にあるエクストラ渦の発達により引き起こされることなどを明らかにしている。さらに、2 次正規モードから主モードへ分岐するレイノルズ数の範囲を決定し、その結果が物理実験結果と定性的に一致することを確認し、物理実験では未だ確認されていない大きいアスペクト比のモード変化について数値的な予測も行っている。

今回得られた、初期条件を厳密クエット流として計算した準定常解の分布を表 3.2 に示す。表 3.1 と比較すると、モードの分布はおおむね一致しているが、表 3.1 において変異 4、5、6 セルモードが現れていた  $\Gamma = 4.2 \sim 4.6$ 、 $Re = 600 \sim 650$  の範囲が正規 6 セルモードになっている。その替わり、 $\Gamma = 5.2 \sim 6.4$ 、 $Re = 950 \sim 1000$  の範囲で変異 6 セルモードが現れる。表 3.1 に見られた変異 4、5 セルモードは初期条件が厳密クエット流れの下では現れなかった。表 3.1 ではモード分布の塊の中に飛び地のように他のモードが混じっていたが、

表 3.2 ではモードのばらつきが少なく、各モードが比較的かたまって分布しており、各モード間の境界がより明確になっている。計算結果を戸谷らの流れの分岐図と比較すると、正規 10 セルモードが戸谷らの流れの分岐図に存在しないことを除けば、全ての範囲で変異モードも含めたそれぞれのモードの存在が確認されている。

前田の研究では、二次正規モードから主モードへの分岐、つまり、正規 4 セルモードから正規 2 セルモード、正規 6 セルモードから正規 4 セルモード、正規 8 セルモードから正規 6 セルモード、正規 10 セルモードから正規 8 セルモードへの分岐が起こるレイノルズ数の範囲を決定している。本計算では、前田の研究のように変化させるレイノルズ数の範囲が 10 以下になるまで詳細には調べていないが、準定常解分布から、それぞれのモードの境界がほぼ一致しており、二次正規モードから主モードへ分岐するレイノルズ数の範囲は、初期条件を線形クエット流とした場合と、厳密クエット流とした場合でそれほど変化しないということが言える。

初期条件を静止流体として計算した準定常解の分布を表 3.3 に示す。表 3.1 と比較すると、(1) 正規 2 セルモード、正規 6 セルモードが現れる範囲が拡大し、(2) 正規 8 セルモードがほとんど現れなくなり、(3) 変異セルモードの現れる範囲が広がっている。これまで確認されている変異 4、5、6 セルモードに加えて、図 3.2 の流れ関数等値線図に示されるような変異 3、7、8 セルモードが新たに確認された。図 3.2(a) に示される変異 3 セルモードでは、上側壁面付近に変異セルモードが形成され、内円筒と外円筒の両側にエクストラ渦を伴っている。エクストラ渦は他の流れに比べて弱い流れであるため、流れ関数等値線図では明確には現れていないが、図 3.3 に示した上側壁面の  $r$  方向せん断応力図より、内円筒付近では正、つまり内円筒から外円筒への流れが存在している。変異セルが上側壁面と接している  $r = 0.4$  付近で一度符号が変わり、負の値、つまり外円筒から内円筒への流れが存在している。外円筒付近で再び符号が正になり、内円筒から外円筒への流れが存在している。以上のことから、内円筒と外円筒の両壁面付近におけるエクストラ渦の存在が確認できる。図 3.2(b) に示される変異 7 セルモードでは、下側壁面付近に変異セルモードが形成され、変異 3 セルモード同様、内外両円筒側にエクストラ渦を伴っている。図 3.2(c) に示される変異 8 セルモードでは、上側と下側の両壁面付近に 2 つの変異セルが形成されている。これらの変異セルも、内外両円筒側にエクストラ渦を伴っている。以上のことから、変異セルは内外両円筒側に 2 つのエクストラ渦を伴っていることが確認できた。変異セルモードが現れる範囲はばらつきが少なく、セル数はそれぞれ違うが、大きく分けて  $\Gamma = 2.6 \sim 4.0$ 、 $Re = 400 \sim 1000$  の範囲、 $\Gamma = 4.6 \sim 6.6$ 、 $Re = 400 \sim 500$  の範囲、 $\Gamma = 5.8 \sim 7.2$ 、 $Re = 650 \sim 950$  の範囲の 3 つの領域に分布している。この計算結果を戸谷らの流れの分岐図と比較すると、正規 10 セルモードに加えて変異 8 セルモードも、戸谷らの流れの分岐図には存在しない。その他のモードは、全ての範囲で変異モードも含めたそれぞれのモードの存在が確認されている。

アスペクト比、レイノルズ数を同じにしても初期条件の違いによって異なったモードが現れるということは、物理的条件が同じであってもそのレイノルズ数に達するまでの増速率の違いなど、形成条件の違いによっていくつも安定しうる状態が存在するというテイラー渦の非一意性を強調するもので、非常に興味深い現象である。増速率の違いによるテイラー渦の非一意性については第 5 章で詳述する。

表3.1: 初期条件を線形近似クエット流とした場合の準定常解分布

Re	1000	2	4	4	2	4	4	4	4	4	4	6	4	4	4	4	4	4	8	4	6	6	6	6	6
	950	2	4	4	2	2	2	4	4	4	4	6	6	4	4	4	4	4	8	8	6	6	6	6	6
	900	2	4	4	2	2	2	4	2	4	6	6	6	4	4	4	4	4	8	8	8	8	6	6	6
	850	2	4	4	4	2	2	4	4	4	6	6	6	4	4	4	4	6	8	8	8	6	8	10	6
	800	2	4	4	2	4	4	4	2	4	6	6	6	4	4	4	6	6	8	8	8	8	6	10	10
	750	2	4	4	4	4	4	2	2	4	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	6	8	10	10
	700	2	4	4	4	4	2	4	2	4	6	6	4	6	4	A6	4	4	4	4	4	8	6	6	8
	650	2	4	4	4	2	2	4	4	A4	2	6	6	6	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	8
	600	2	4	4	4	2	2	2	2	2	A5	A4	6	6	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	8
	550	2	4	4	4	4	2	2	2	4	6	6	6	6	4	6	6	4	4	4	6	6	6	8	6
	500	2	2	4	4	2	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	8	10	10
	450	2	2	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	10	10	10	10
	400	2	2	4	4	4	4	4	6	4	6	6	4	6	6	8	8	8	8	8	8	10	10	10	10
	350	2	2	4	4	4	2	2	4	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	10	10	10	10
	300	2	2	2	4	4	4	2	4	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	10	10	10	10
	250	2	2	2	4	4	4	2	2	4	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	10	10	10
	200	2	2	2	2	4	4	4	2	4	6	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	8
	150	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8
	100	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8
	50	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	
	$\Gamma$																								

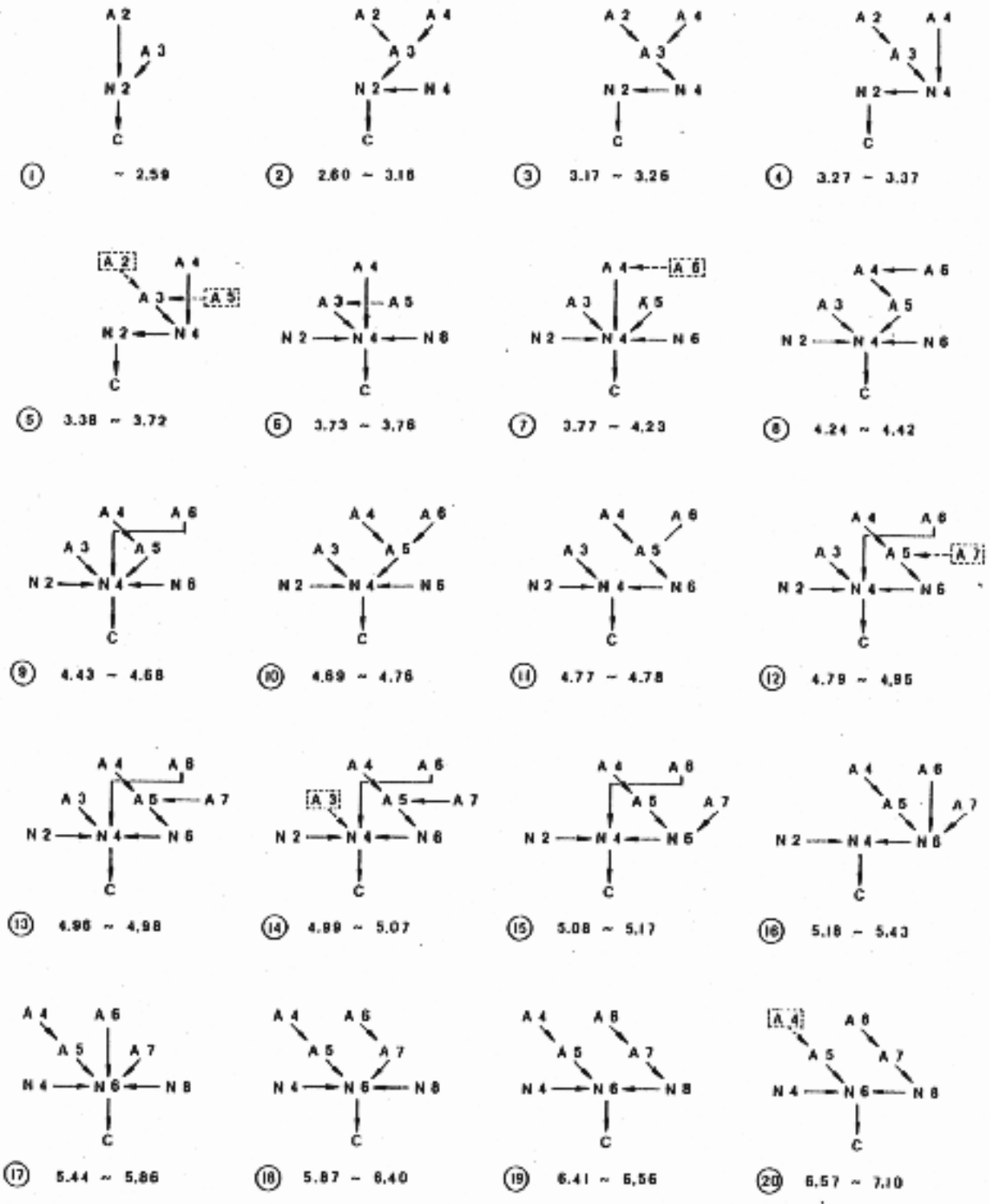


図 3.1: 戸谷らの物理実験による流れの分岐図

表3.2: 初期条件を厳密クエット流とした場合の準定常解分布

Re	1000	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	A6	A6	A6	A6	A6	A6	A6	4	6	8	8
	950	2	4	4	4	4	4	2	4	4	4	6	6	6	A6	A6	6	6	6	4	4	8	8	8	8
	900	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8
	850	2	2	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	4	6	6	6	6	6	8	8	8	8
	800	2	2	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	4	6	6	6	6	6	8	8	8	8
	750	2	4	4	2	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8
	700	2	4	4	4	2	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8
	650	2	4	2	4	2	2	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8
	600	2	4	2	4	2	2	2	4	6	6	6	6	6	6	6	6	8	6	6	6	8	8	10	10
	550	2	4	4	4	4	4	2	4	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	8	10	10	10
	500	2	2	4	2	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	10	10	10	10	10
	450	2	2	4	2	4	2	4	6	6	6	6	6	6	6	6	8	10	10	10	10	10	10	10	10
	400	2	2	4	4	2	2	4	6	6	6	6	6	6	6	8	6	10	10	10	10	10	10	10	10
	350	2	2	4	4	2	2	2	4	6	6	6	6	6	8	8	6	6	6	10	10	10	10	10	10
	300	2	2	2	4	4	2	2	4	6	6	6	6	6	6	8	8	8	6	6	10	10	10	10	10
	250	2	2	2	4	4	4	2	2	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	6	8	10	10	10
	200	2	2	2	2	4	4	4	2	4	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	8	10
	150	2	2	2	2	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8
	100	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8
	50	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6
	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	
	$\Gamma$																								

表3.3: 初期条件を静止流体とした場合の準定常解分布

Re	1000	2	2	A4	A4	A4	A4	A4	A4	4	4	6	A5	6	6	6	6	6	6	6	6	A5	6	6	A7	
	950	2	2	A4	A4	A4	A4	A4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	A8	6	6	6	6	A7	6	
	900	2	2	A4	A4	A4	A4	A4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	A8	6	6	6	6	6	A8	
	850	2	2	2	A4	A4	A4	A4	2	4	6	6	6	6	6	6	6	6	A8	6	6	6	6	6	6	
	800	2	2	2	A4	A4	A4	A4	A4	4	6	6	6	6	6	6	6	A7	A8	6	6	A8	A8	6	6	
	750	2	2	A4	2	4	A4	A4	A4	4	6	6	6	6	6	6	6	A7	A8	A8	6	6	A8	A8	6	
	700	2	2	A4	A4	2	A4	A4	A4	6	6	6	6	6	6	6	6	A7	A8	A8	A8	A8	A8	A8	A8	
	650	2	2	A4	A4	A4	2	A4	A4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	A8	A8	A8	A8	A8	A8	A8	
	600	A3	2	A4	A4	A4	A4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	
	550	A3	A4	2	2	A4	A4	A4	2	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	10	6
	500	A3	A4	A4	2	2	2	A4	A4	6	6	2	A6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	10	10	10
	450	2	A4	A4	A4	2	2	4	2	6	6	A4	A4	6	A8	A8	6	6	6	6	6	10	10	10	10	10
	400	2	2	A4	A4	A4	2	4	6	6	6	A4	A4	A6	A8	A8	A8	A8	A8	A8	A8	A8	A7	10	10	10
	350	2	2	2	2	2	2	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	10
	300	2	2	2	2	2	2	2	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	10
	250	2	2	2	2	2	2	2	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	10
	200	2	2	2	2	2	2	2	2	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	150	2	2	2	2	4	4	2	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	100	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	50	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6
	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2		
	$\Gamma$																									



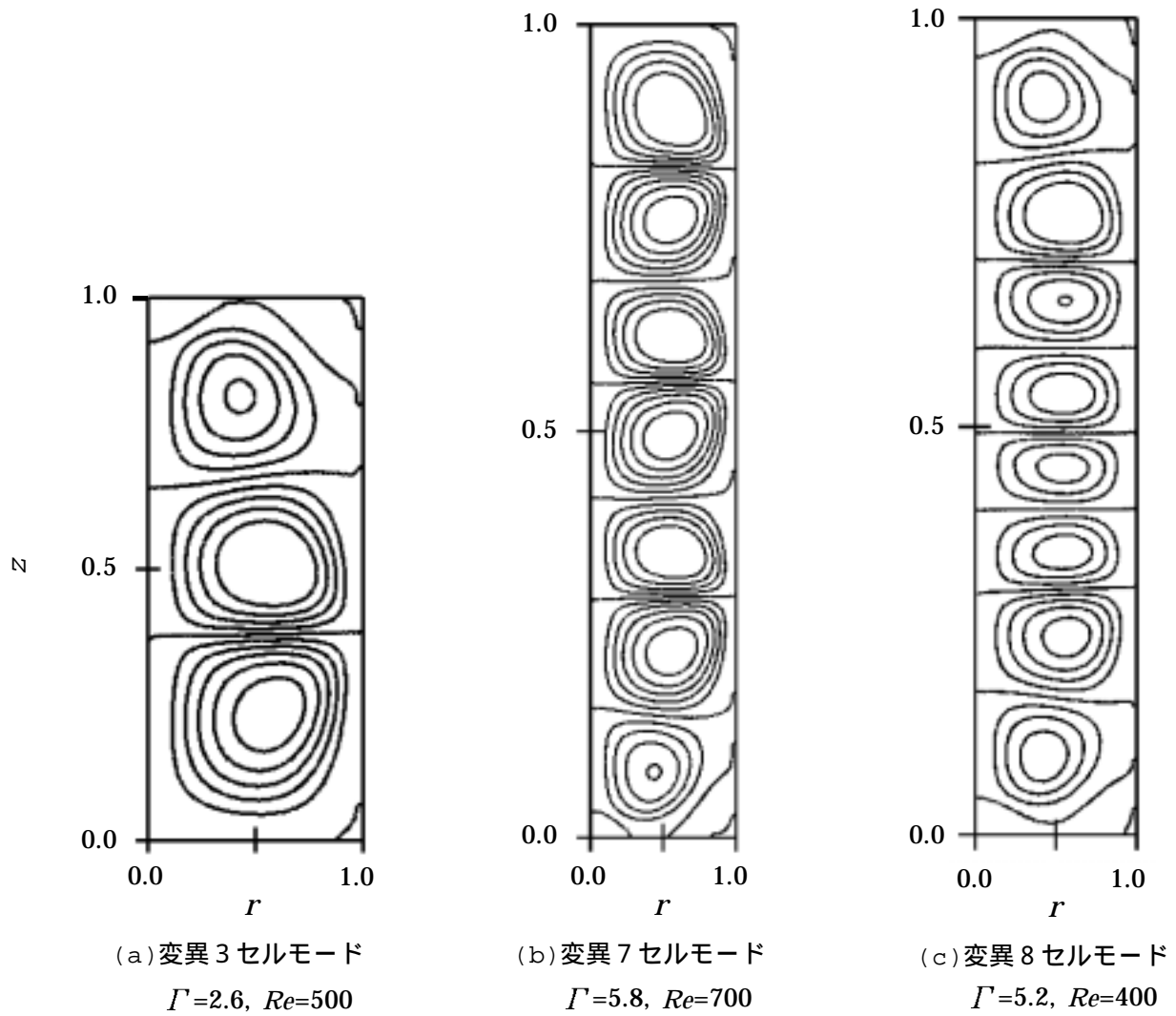


図 3.2: 変異 3、7、8 セルモードにおける  $\psi$  の等値線図

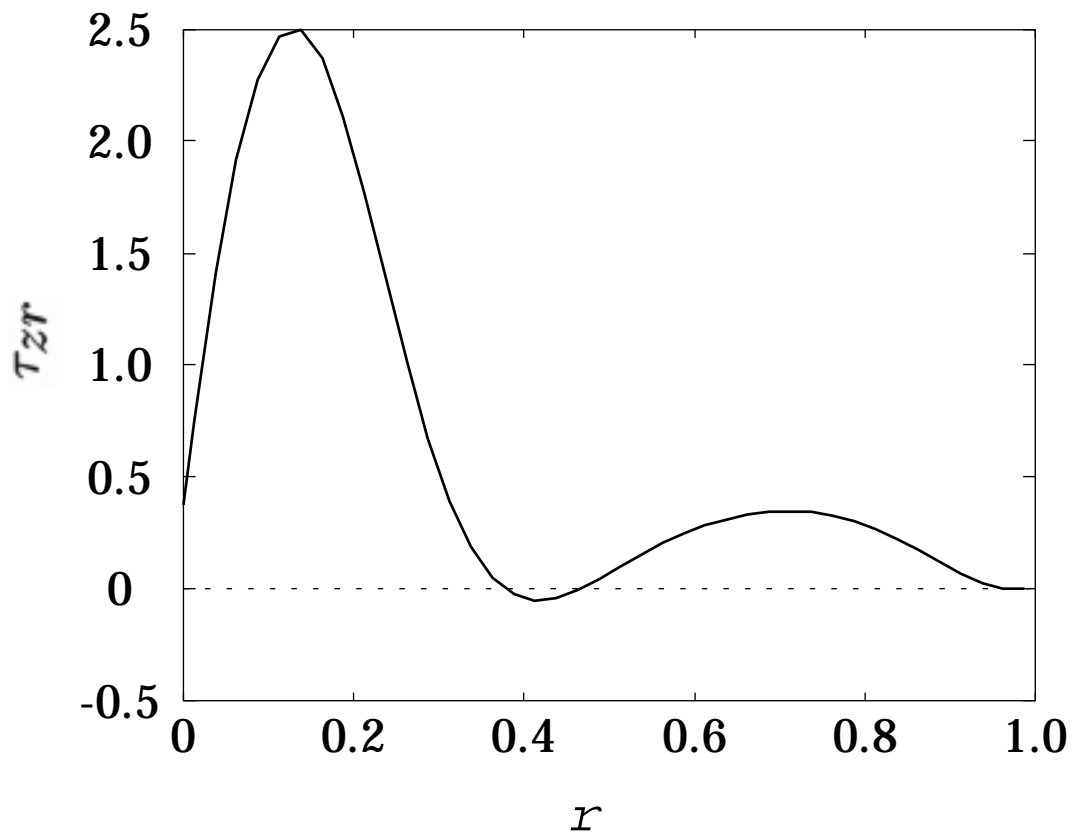


図 3.3: 図 3.2(a) の変異 3 セルモードでの、上側壁面  $r$  方向せん断応力図

# 第4章 アスペクト比が小さい場合の準定常解分布と分岐現象

## 4.1 目的

有限長のテイラー渦を支配する主要パラメータはアスペクト比、レイノルズ数である。アスペクト比  $\Gamma$  とレイノルズ数  $Re$  の組合せにより様々なモードのテイラー渦が現われることが実験的に示されている [10] [17] [19]。

Cliffe は  $\Gamma = 0.5 \sim 1.5$  の範囲で、定常支配方程式に基づく有限要素法解析により対称 2 セルと非対称 1 セルの流れが現れる境界を決定している。彼らは正規 2 次モードの中にも、安定で  $z$  方向中央断面に対して対称な流れと、不安定で非対称な流れ、そして”single-cell flow” と呼ばれる安定で非対称な流れが存在することを確かめている [6]。

本章ではこれらの研究をさらに進展させ、アスペクト比が 1 近傍のテイラー渦流れについて、ツインセルモードを含めた実験的に存在が示されているモードの存在を数値的に確認する。また、内円筒周速度を減少させることにより、流れが他のモードへ分岐するメカニズムを解明することを目的とする。

## 4.2 数値実験条件

主な計算条件は第 2.7 節で述べたとおりである。モード間の分岐を調べるためにレイノルズ数を減少させる場合は、流れが十分発達した無次元時間  $t_1$  から無次元時間  $t_2$  の間にレイノルズ数をある値から別の値へ直線的に変化させる。

戸谷らの実験にあわせ、流れが十分に発達するまでの時間  $t_1$ 、減速を行う時間  $t_2$  とともに有次元時間で 50 秒とする。

## 4.3 数値実験結果および考察

### 4.3.1 定常なモードの分布

アスペクト比を 0.1 から 1.6 まで 0.1 刻みで 16 個、レイノルズ数を 100 から 1500 まで 100 刻みで 15 個変化させ、合計 240 通りの場合について流れが十分に発達したとき現れるモードを調べた。レイノルズ数は、全領域にわたり速度ゼロの初期状態から急激に上昇させその後一定とする。

最終的なモードを図 4.1 に、正規 2 セルモード、変異 1 セルモード、ツインセルモードの  $\theta$  断面速度ベクトル図を図 4.2、図 4.3、図 4.4 に示す。図 4.3、4.4 では戸谷らの可視化実験の結果もあわせて示してある。

図 4.1 において、レイノルズ数が小さい場合、図 4.2(a) の  $\theta$  断面速度ベクトル図に示すような正規 2 セルモードが形成される。正規 2 セルモードでは上下壁面で外側円筒から内側円筒へ向かう流れが存在する。

正規 2 セルモードの中にも、図 4.2(a) に示されるアスペクト比 1.0、レイノルズ数 800 の場合のように  $z$  方向中央断面に対して対称なモードもあれば、図 4.2(b) に示されるアスペクト比 1.0、レイノルズ数 200 の場合のように著しく対称性を失ったモードもある。この  $z$  方向中央断面に対する各モードの対称性を比較するため、流れ関数  $\psi$  の最大値の座標  $(r_{max}, z_{max})$ 、最小値の座標  $(r_{min}, z_{min})$  をそれぞれ求めると、図 4.2(a) では  $(r_{max}, z_{max}) = (0.46, 0.31)$ 、 $(r_{min}, z_{min}) = (0.46, 0.69)$  と、 $z$  方向中央断面に対して対称であるのに対し、図 4.2(b) では  $(r_{max}, z_{max}) = (0.21, 0.17)$ 、 $(r_{min}, z_{min}) = (0.42, 0.56)$  と非対称になっている。このように、正規 2 セルモードは必ずしも  $z$  方向中央断面に対して対称であるわけではなく、その対称性にもばらつきがある。この非対称なセル流を Cliffe は "single-cell flow" と呼んでいる [6]。

図 4.3 は変異 1 セルモードを示している。図 4.3(b) において、変異セルは反時計まわりで回転している。そして、内外両円筒側に時計回りで回転する 2 つのエクストラ渦を伴っている。外側エクストラ渦は弱いため、この図では明確には現れていない。得られた結果は図 4.3(a) に示される戸谷らによる物理実験で得られた結果と比較しても渦の様子がよく一致している。

アスペクト比が 0.6 から 0.9、レイノルズ数が 1000 から 1500 近辺には、図 4.4(b) に示されるようなツインセルモードが現れる。ツインセルモードの特徴は、他のモードでは付着点が内(外)円筒壁面から外(内)円筒壁面、あるいは内外円筒壁面から上下端面に存在しているのに対し、上(下)側端面から下(上)側端面へ存在しているということである。図 4.4(b) では、反時計まわりに回転する流れをはさみ、両側に時計まわりに回転する流れがある。左下隅の流れは弱く、図からは読みとりにくいだが、回転する流れが存在している。図 4.4(a) に示される物理実験結果と比較すると、それぞれのレイノルズ数は違うが渦の様子はよく一致している。これまでツイン渦は実験的にしか存在が確認されていなかったが、今回はじめて数値的に確認することができた。

### 4.3.2 非定常モードの運動

図 4.1 中の Rotation の部分は、定常なモードではなく非定常なモードが現れる領域である。これらはほぼ一定の周期でパターン変化を繰り返す。

アスペクト比 0.5 でレイノルズ数 600 と 1500 の場合の、エンストロフィ  $\Omega$  の時間変化をそれぞれ図 4.5 と図 4.6 に示す。図 4.5、図 4.6 を比較すると図 4.5 はほぼ正弦波形をしているのに対し、レイノルズ数の大きい図 4.6 では正弦波形から大きくずれて、時点 4 から時点 5 への積分値の減少が急になっている。図 4.7、図 4.8 は  $\theta$  断面平均運動エネルギーを示している。運動エネルギーもエンストロフィと同じく、レイノルズ数が小さい場合、波形が正弦波形に近いのに対し、レイノルズ数が大きい場合、波形が正弦波形からずれている。

レイノルズ数 600、1500 の場合の非定常な渦の様子を図 4.9、図 4.10 に示す。図中の時点 1~6 はそれぞれ図 4.5、図 4.6 中の 1~6 に対応する。レイノルズ数が大きい 1500 の場合、図 4.10(a) の時点 1 において半径方向に 4 つの渦が存在する。エンストロフィが増加するにつれ図 4.10(b) のように一番外側の渦が消滅し渦は 3 つになる。そして、図 4.10(c) のように 3 つの渦のうち両側の渦が接近し始め、図 4.10(d) のようにひとつの大きな渦になり、この時点でエンストロフィは最大になる。その後、図 4.10(e) のように下側の渦が上側の渦に押し出されて内側に追いやられ、図 4.10(f) のようにお互いを二分して再び 4 つの渦を形成する。図 4.10(f) は図 4.10(a) と上下逆になっており、図 4.6 のエンストロフィ図に現れる波形の 2 周期が非定常運動の 1 周期に相当する。

図 4.9 に示される、レイノルズ数が小さい 600 の場合は、それぞれの渦は他の渦を完全に二分するほどのエネルギーを持っておらず、レイノルズ数が 1500 の場合のように一方の渦が他方の渦を分断するようなことはない。

非定常運動の周期のレイノルズ数に対する変化を調べるため、アスペクト比を 0.5 で一定にして、レイノルズ数を 600、700、800、900、1000、1100、1200、1300、1400、1500 とした場合における非定常運動の周期の変化を示したのが図 4.11 である。非定常運動の周期はエンストロフィグラフの周期の 2 周期分なので、エンストロフィグラフの 2 周期分を読みとっている。無次元時間での非定常運動周期はレイノルズ数の増加に伴ってほぼ正比例して増加している。実時間での周期は無次元周期割るレイノルズ数の関係にあるため、実時間での非定常運動の周期はレイノルズ数が違っててもほぼ同じであると言える。

### 4.3.3 モード間の分岐

図 4.1 において得られたモードの内、定常である正規 2 セルモード、変異 1 セルモード、ツインセルモードの間で内円筒周速度を減少させることによる分岐を観察した。

図 4.12 はアスペクト比 0.8 でレイノルズ数を 500 から 100 に減少させた場合に現れる変異 1 セルモードから正規 2 セルモードへの流れ関数等値線図の変化を示す。同様の変化はレイノルズ数を 350 から 340 に減少させた場合にも現れるが、ここでは図的に変化が顕著な例として、レイノルズ数を 500 から 100 へ減少させた場合を示す。図 4.12 中の変異 1 セルモードは内円筒側、外円筒側両方にエクストラ渦を伴っている。この両側のエクストラ渦は、レイノルズ数の減少につれ、互いに引き合い融合して変異セルと端面の間に一つの新たな正規セルを形成する。新しくできたセルはその後成長を続け、もう一方の渦と同じ勢力を持つようになり、流れは正規 2 セルモードへと分岐する。

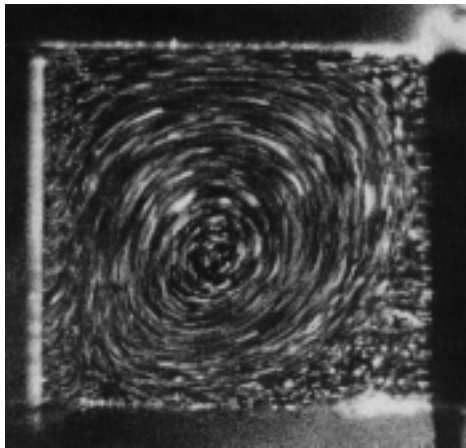
図 4.13 はアスペクト比 1.0 でレイノルズ数を 800 から 500 に減少させた場合に現れる正規 2 セルモードから変異 1 セルモードへの流れ関数等値線図の変化を示す。正規 2 セルモードではレイノルズ数の減少に伴い一方のセルが発達し、他方のセルを端面に押しやり、やがてそれを分断する。発達したセルの付着点が端面に到達することにより分断されたセルは内円筒側、外円筒側のエクストラ渦に二分され、流れは変異 1 セルモードとなる。

正規 2 セルモードから変異 1 セルモードへの分岐、および変異 1 セルモードから正規 2 セルモードへの分岐について、変化させるレイノルズ数の幅を 10 以下に抑え、減速の割合を緩やかにして求めたそれぞれのモード変化点を図 4.14 に示す。図には Cliffe が定常方程

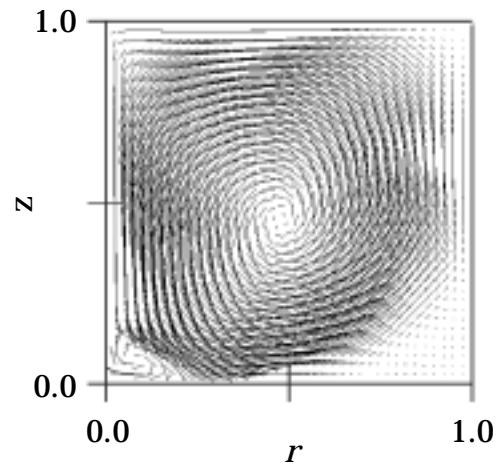
式を解くことにより得た結果も示す [6]。両者の上側曲線は定量的に一致している一方、下側曲線には違いが見られる。これは、本計算が定常状態ではなく非定常状態を扱っていることによるものと考えられる。

図 4.15 は、アスペクト比 0.8 でレイノルズ数を 1000 から 600 に減少させた場合に現れるツインセルモードから変異 1 セルモードへの流れ関数等値線図の変化を示す。減速に伴い内円筒側エクストラ渦と接している端面と反対側の端面での付着点が次第に外円筒側へと移動する。やがてその付着点が端面を離れ、外円筒に付着することにより変異 1 セルモードへと分岐する。



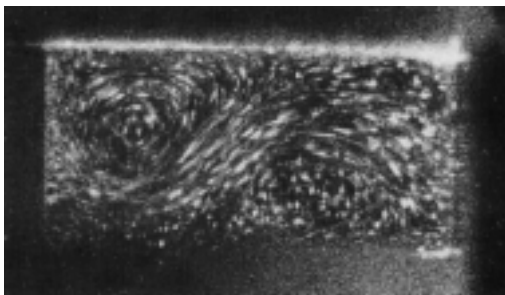


(a) Experimental result  
 $(\Gamma = 1.0, Re = 659)$

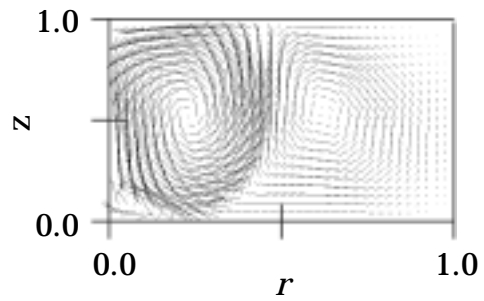


(b) Numerical result  
 $(\Gamma = 1.0, Re = 600)$

図 4.3: 変異 1 セルモード



(a) Experimental result  
 $(\Gamma = 0.51, Re = 653)$



(b) Numerical result  
 $(\Gamma = 0.6, Re = 1400)$

図 4.4: ツインセルモード



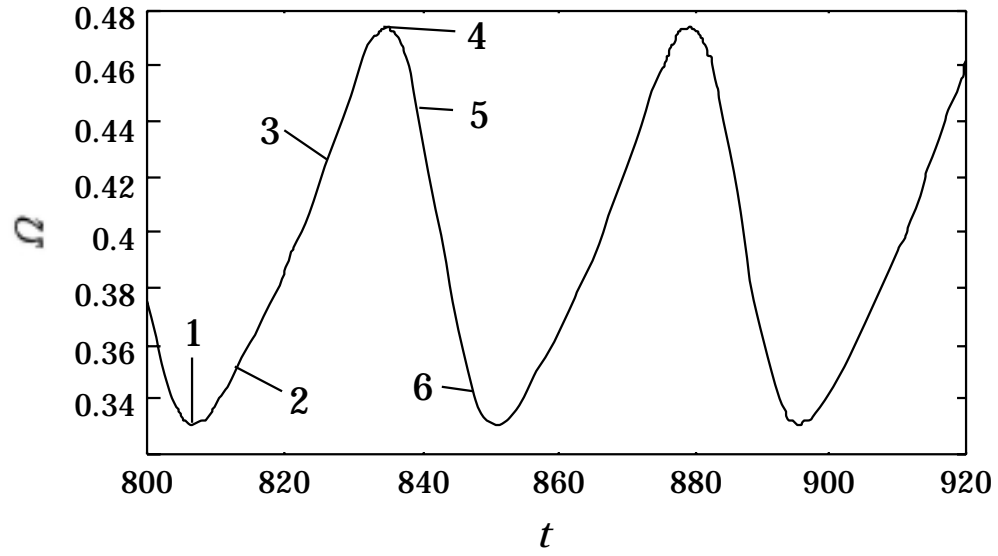


図 4.5: エンストロフィの時間変化 ( $\Gamma = 0.5, Re = 600$ )

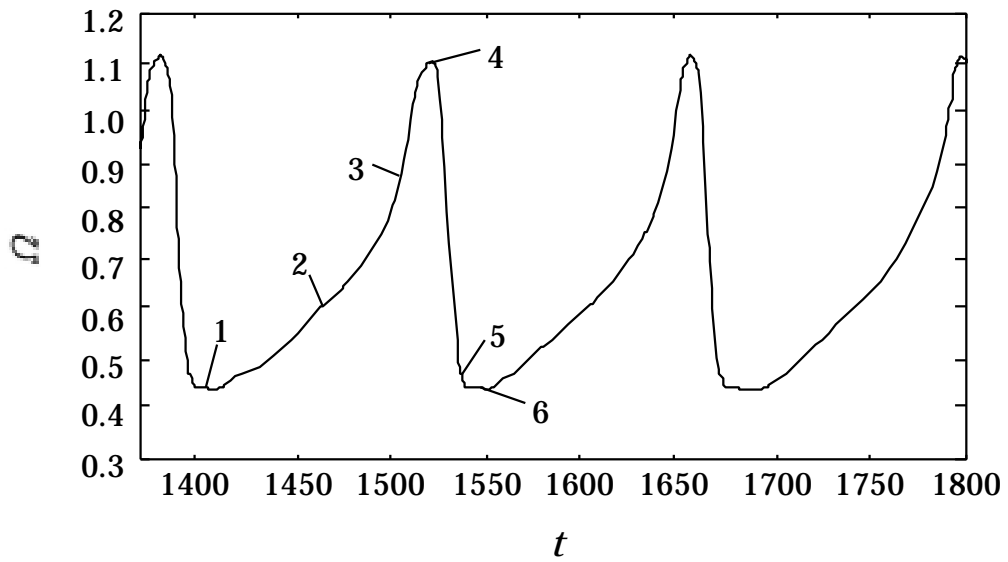


図 4.6: エンストロフィの時間変化 ( $\Gamma = 0.5, Re = 1500$ )

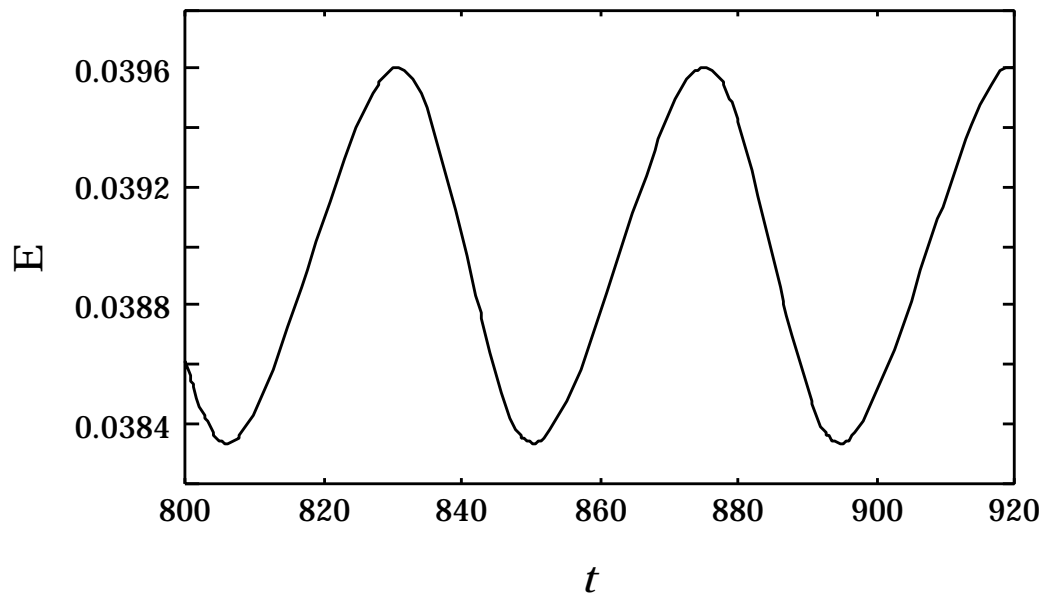


図 4.7: 運動エネルギーの時間変化 ( $\Gamma = 0.5, Re = 600$ )

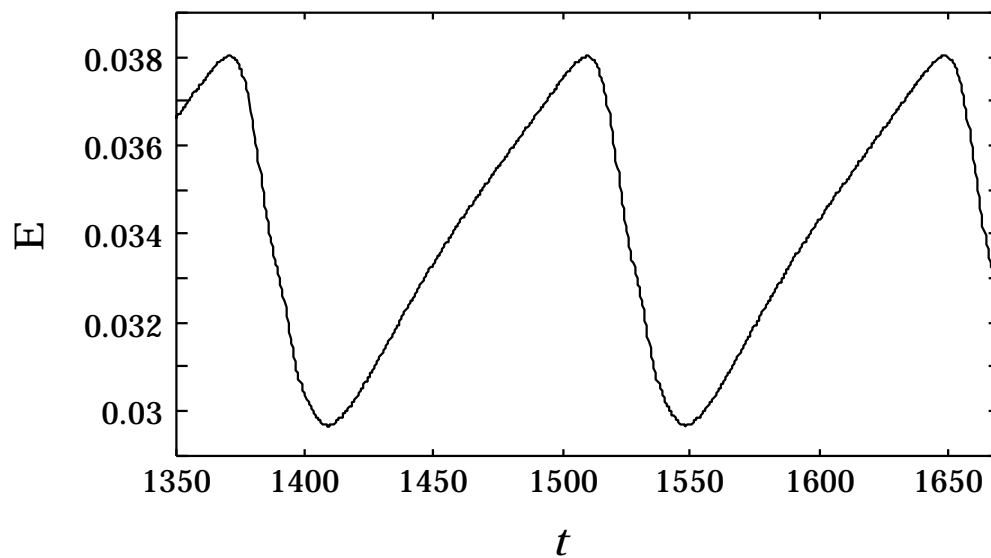


図 4.8: 運動エネルギーの時間変化 ( $\Gamma = 0.5, Re = 1500$ )

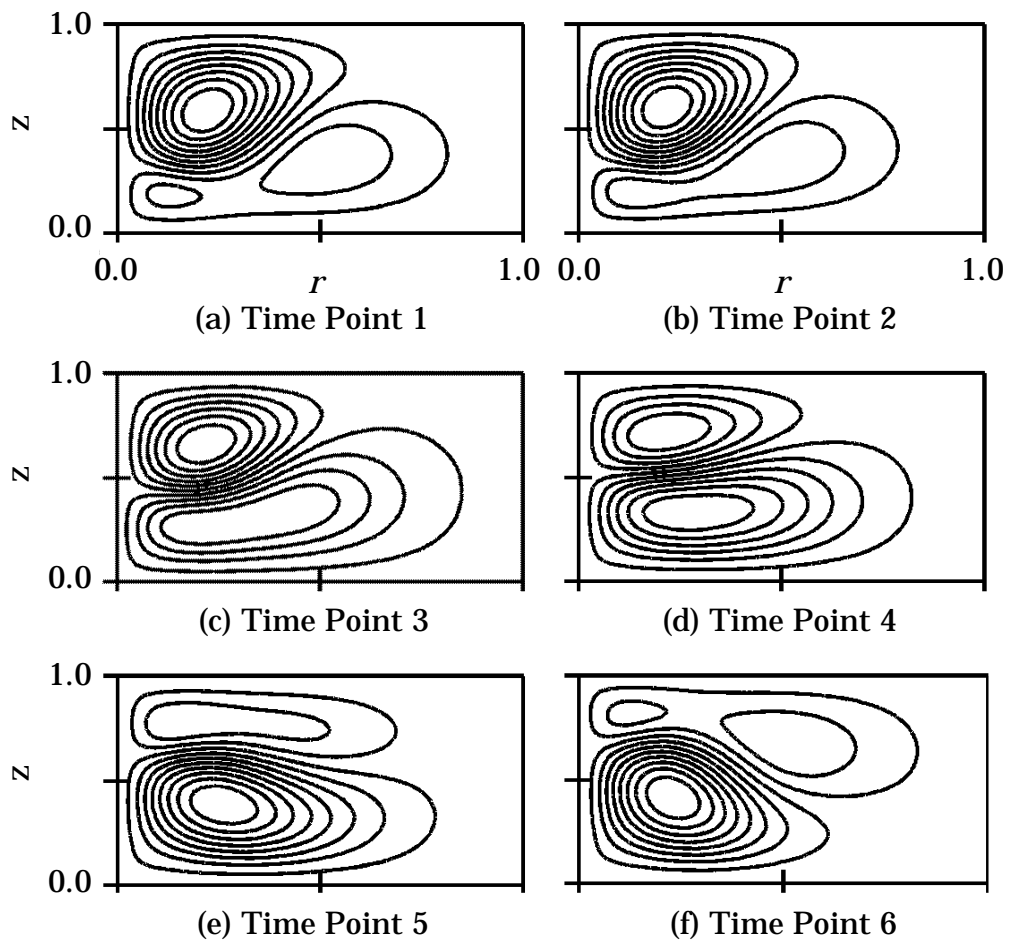


図 4.9: 非定常運動の様子. ( $\Gamma = 0.5, Re = 600$ )  
 それぞれの時点は図 4.5 における時点に相当する。

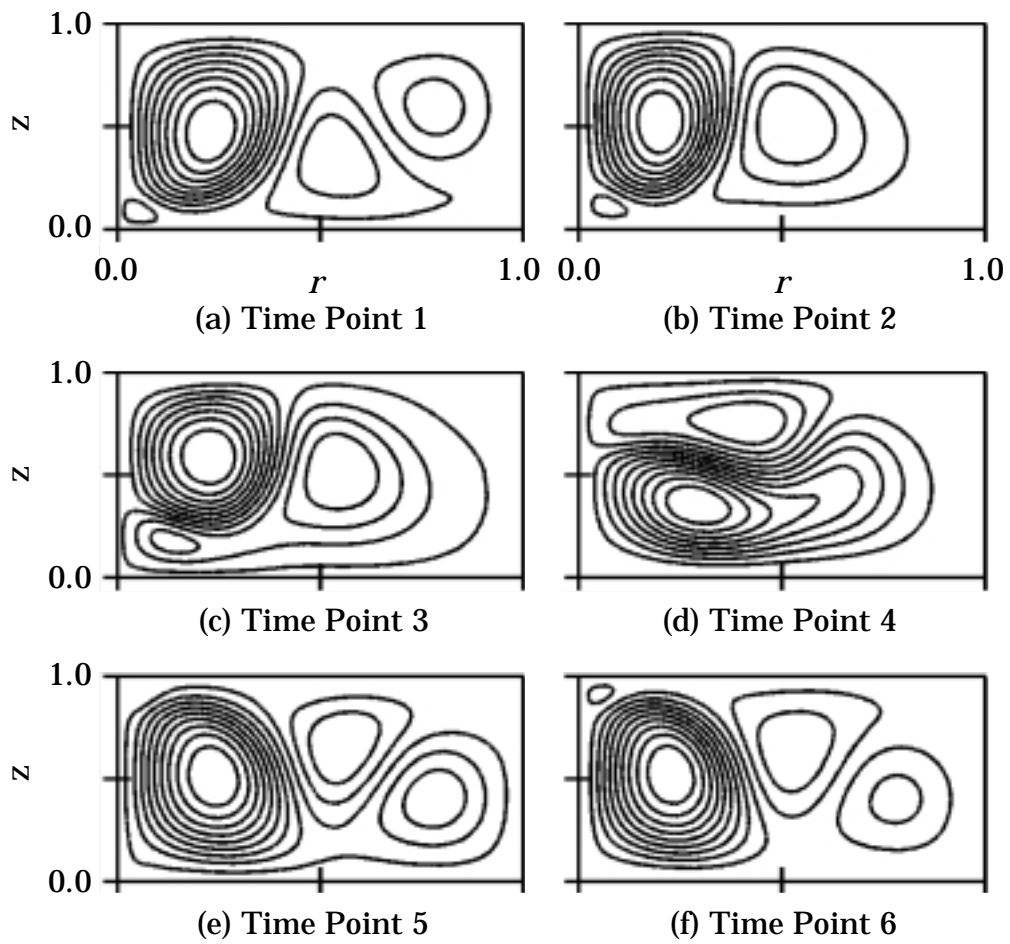


図 4.10: 非定常運動の様子. ( $\Gamma = 0.5, Re = 1500$ )  
 それぞれの時点は図 4.6 における時点に相当する。

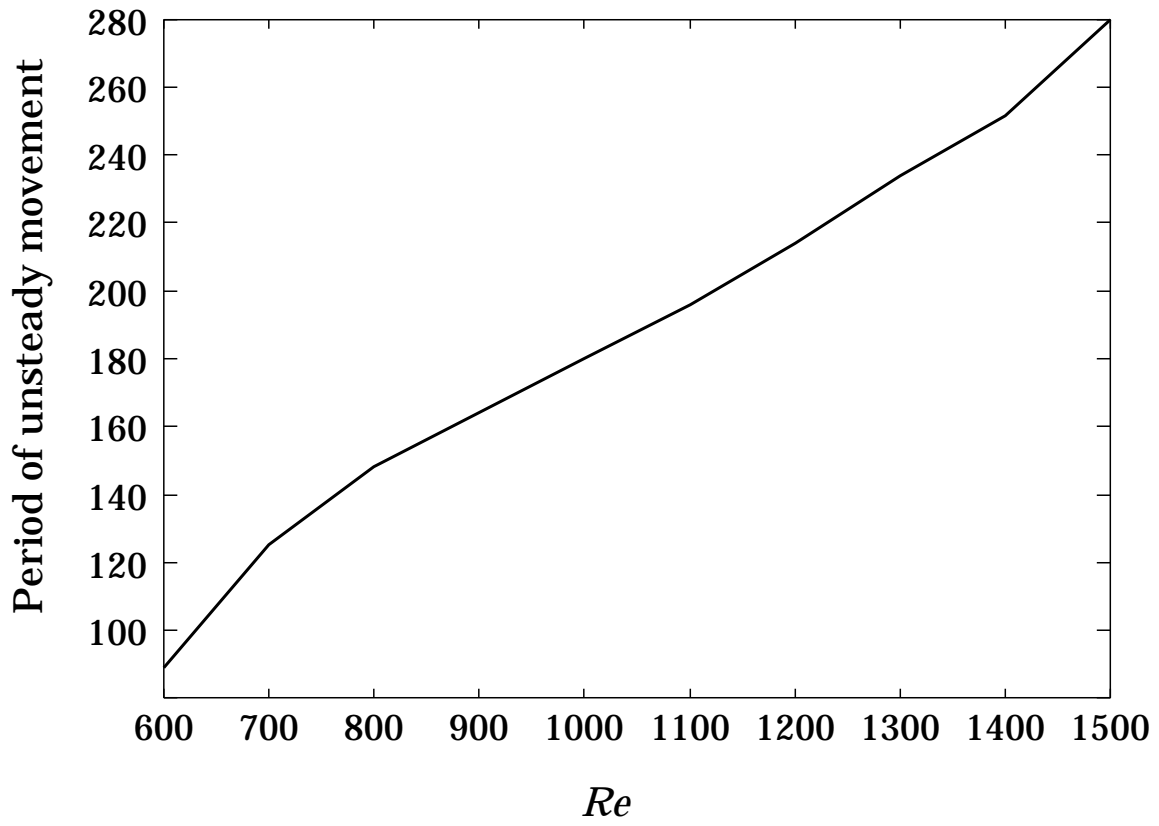


図 4.11: レイノルズ数に対する非定常運動の周期の変化 ( $\Gamma = 0.5$ )

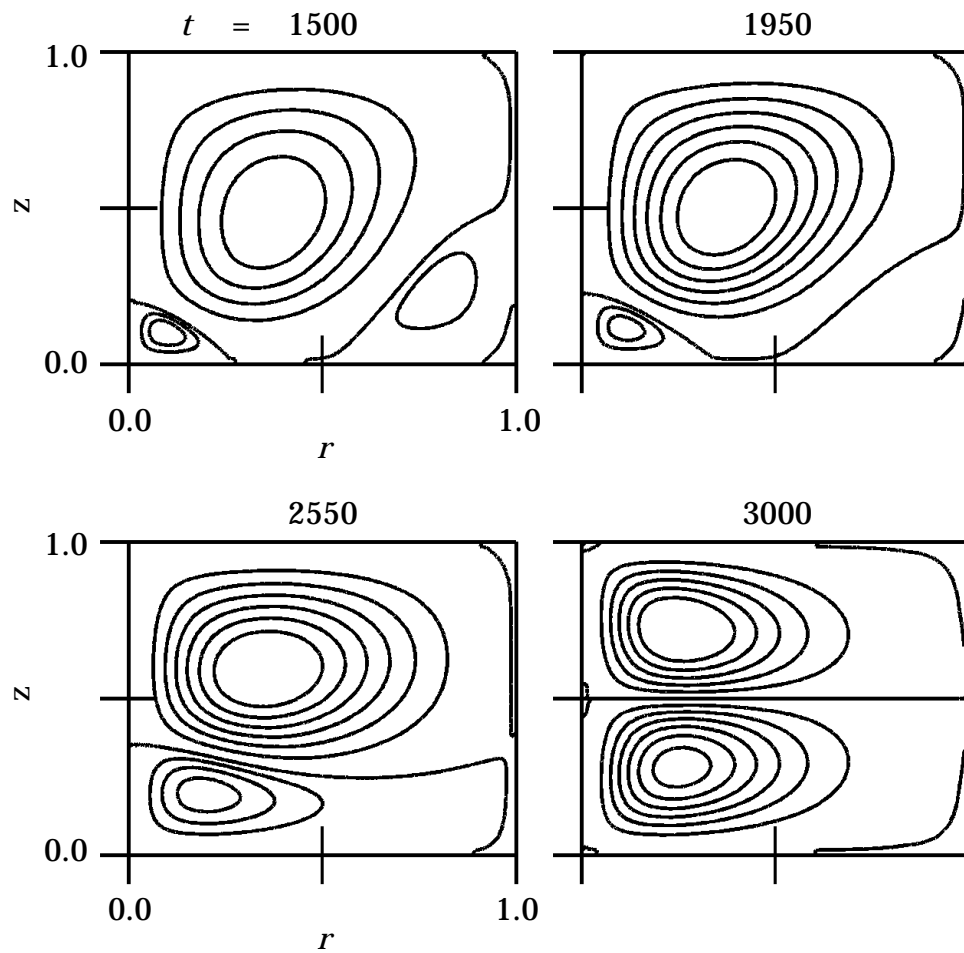


図 4.12: 変異 1 セルモードから正規 2 セルモードへの分岐. ( $\Gamma = 0.8$ ,  
 $Re = 500 \quad 100$ ) 減速開始時間:  $t=900$ , 減速終了時間:  $t=1800$ .

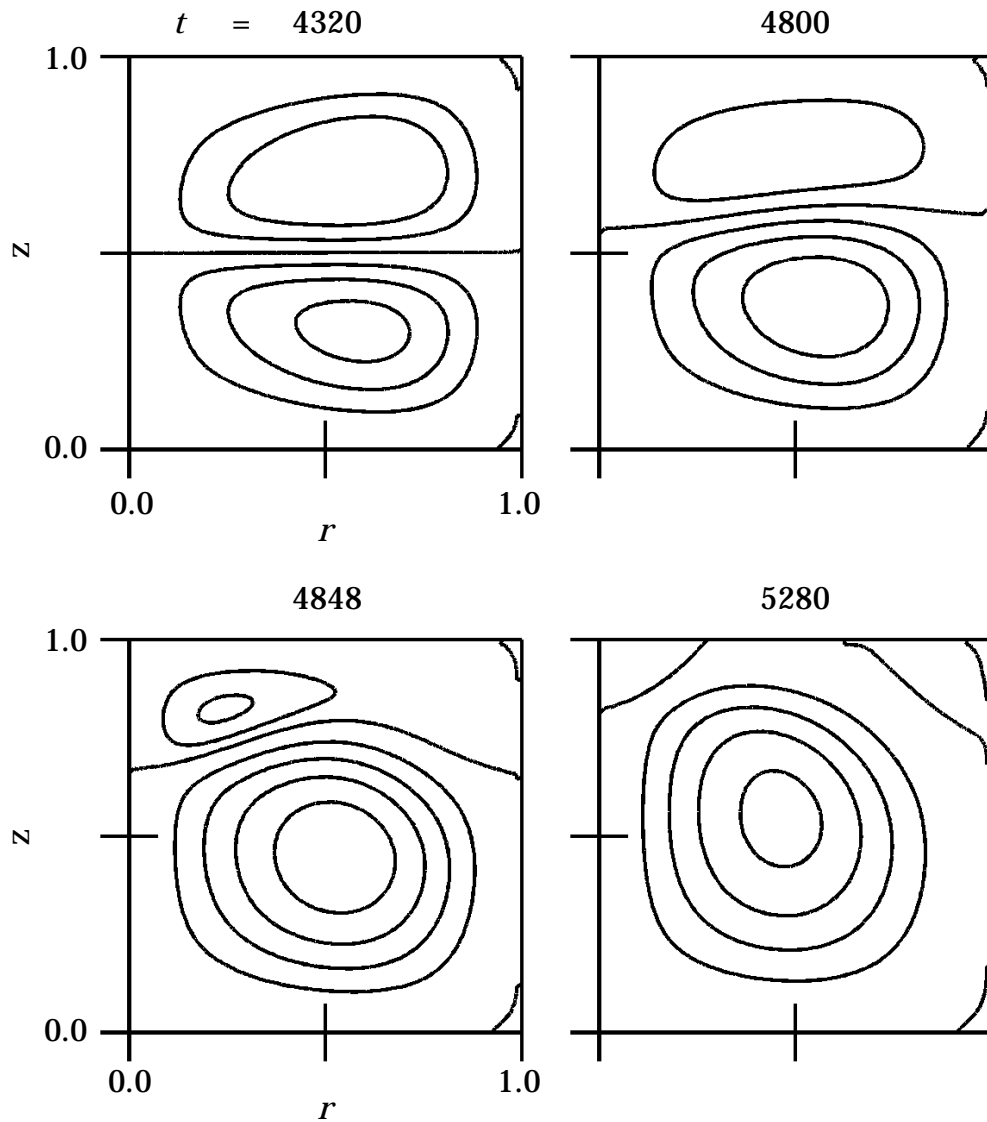


図 4.13: 正規 2 セルモードから変異 1 セルモードへの分岐. ( $\Gamma = 1.0$ ,  
 $Re = 800 \quad 500$ ) 減速開始時間: $t=2400$ , 減速終了時間: $t=4800$ .

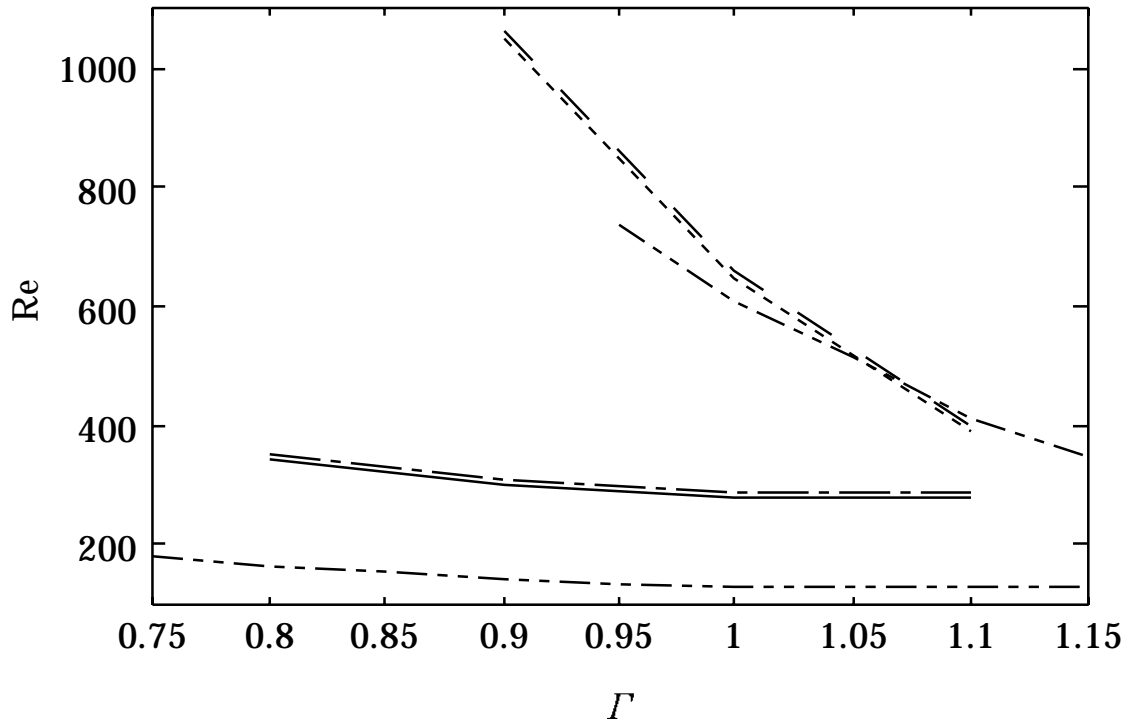


図 4.14: 変異 1 セルモードから正規 2 セルモードへの分岐点および正規 2 セルモードから変異 1 セルモードへの分岐点  
 - - - : 正規 2 セルモードの下限.    ..... : 変異 1 セルモードの上限.  
 - · - · : 変異 1 セルモードの下限.    — : 正規 2 セルモードの上限.  
 - · - · : Cliffe による計算結果.



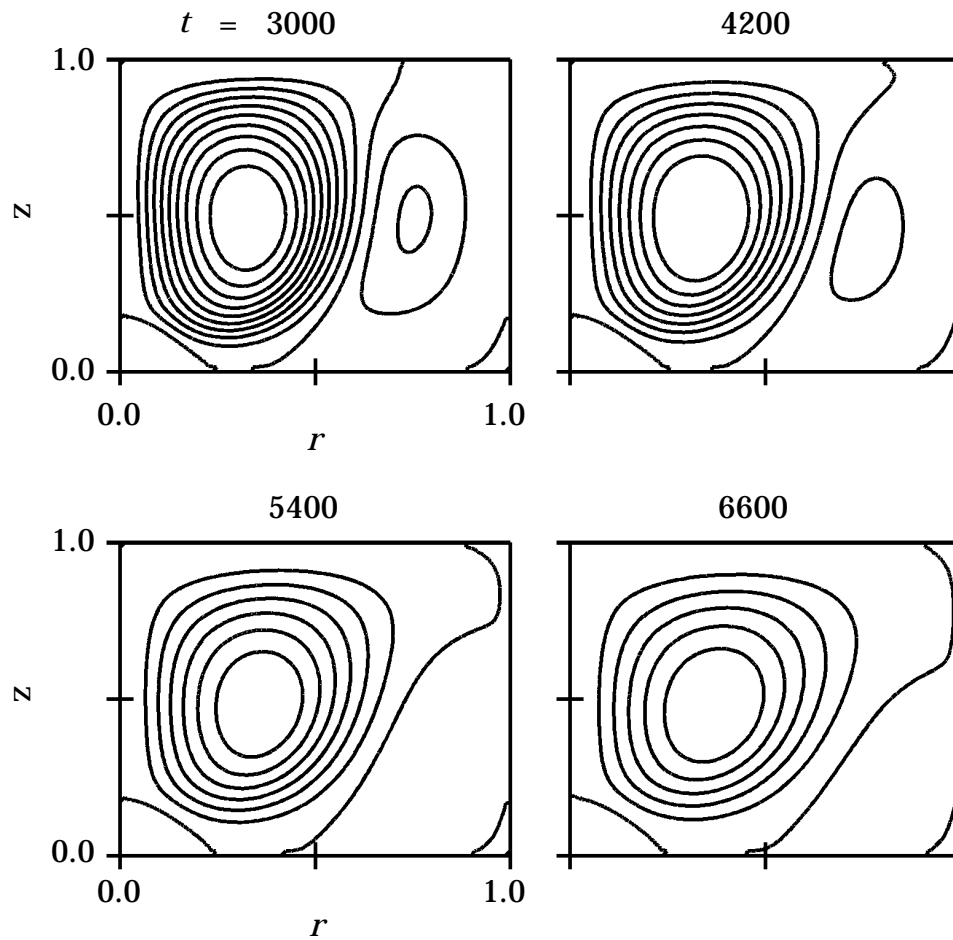


図 4.15: ツインセルモードから変異 1 セルモードへの分岐. ( $\Gamma = 0.8$ ,  
 $Re = 1000 \quad 600$ ) 減速開始時間:  $t=3000$ , 減速終了時間:  $t=6000$ .

# 第5章 静止状態からの増速率の違いによるモード形成過程

## 5.1 目的

テイラー渦の非一意性について、内円筒速度の増速率の違いによるモード形成過程を調べる。前章までの計算は0ステップ目でそのレイノルズ数に対応する内円筒速度を与えているが、増速する時間  $T$  を変化させることにより、例えばある増速時間  $T_1$  では正規2セルモードが現れ、 $T_2$  では変異3セルモードが現れるといった場合、これらふたつの増速時間  $T_1$ 、 $T_2$  の中間のどこかにモード形成の境界点が存在するはずである。このモード形成過程については、物理実験などでこれまでにいくつかの研究がなされている [4] [20] [21]。しかし、物理実験では統計的な結果しか得られず、数値実験においてもモード形成境界点について詳細には述べられていない。そこで、このモード形成境界点について数値的に詳細な解析を行なう。

## 5.2 数値実験条件

主な計算条件は第2.7節で述べたとおりである。初期条件は静止流体とする。戸谷らの実験結果と比較できるように、 $\Gamma = 4.0$  として初期条件を静止流体とした場合、準定常解が変異モードとなる  $Re = 500$ 、 $1000$  としたものと、同じく初期条件を静止流体とした場合、変異モードが現れる  $\Gamma = 2.6$ 、 $Re = 500$ 、 $550$ 、 $600$  の場合について、線形で内円筒周速度を大きくする有次元増速時間  $T(s)$  を変化させ、十分発達した流れが持つモードを調べた。まずおおまかに  $T$  を変化させ、モードが変化した境界の間で  $T$  の変化幅を小さくしていった。

## 5.3 数値実験結果および考察

$\Gamma = 2.6$  とした場合の計算結果を表5.1に示す。表の上から有次元増速時間  $T(s)$ 、無次元加速パラメタ  $St$ 、形成される準定常解を示す。 $\Gamma = 2.6$  では  $T$  の変化幅を0.05まで抑えてモード境界点を求めている。表5.1(a)で示された  $Re = 500$  では、 $T = 0.65$  までは二次モードである変異3セルモードが現れる。そして、 $T = 0.65$  と  $0.70$  の間でモードが変化し、 $T = 0.70$  以降は主モードである正規2セルモードが現れる。表5.1(b)(c)に示されている  $Re = 550$ 、 $600$  のそれぞれの場合で、変異3セルモードと正規2セルモードのモード境

表 5.1: 運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクの比較 ( $\Gamma = 2.6, Re = 500, 550, 600$ )

(a)  $\Gamma = 2.6, Re = 500$

$T(s)$	0.20	0.40	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	1.00
$St$	0.3333	0.1667	0.1111	0.1026	0.0952	0.0889	0.0833	0.0667
準定常解	A3	A3	A3	A3	N2	N2	N2	N2

(b)  $\Gamma = 2.6, Re = 550$

$T(s)$	0.20	0.40	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	1.00
$St$	0.3030	0.1515	0.1010	0.0932	0.0866	0.0808	0.0758	0.0606
準定常解	A3	A3	A3	A3	A3	A3	N2	N2

(c)  $\Gamma = 2.6, Re = 600$

$T(s)$	0.20	0.40	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	1.00
$St$	0.2778	0.1389	0.0926	0.0855	0.0794	0.0741	0.0694	0.0556
準定常解	A3	A3	A3	A3	A3	A3	N2	N2

界点が  $T = 0.75$  と  $0.8$ 、 $T = 0.75$  と  $0.8$  の間にある。

Beilek は変異 3 セルモードの形成過程について、急激なレイノルズ数の増加によって、直接変異 3 セルモードが形成されることはなく、いったん変異 4 セルモードが形成され、その流れが減衰することにより変異 3 セルモードが形成されると主張している [4]。

Bielek の主張を確かめるため、変異 3 セルモードが形成される、 $\Gamma = 2.6, Re = 500$  の場合の、運動エネルギー変化を図 5.1 に、図 5.1 中の時点 1 ~ 6 における流れ関数等値線図を図 5.2 に示す。図 5.2 において、 $t = 600$  の時点では変異 4 セルモードが形成されている。時間が経つにつれ、変異 4 セルモードが減衰し、図 5.1 中のエネルギーのピークを越えると変異 3 セルモードへ分岐をする。このことから、Beilek の主張するように、レイノルズ数を急激に上昇させた場合、変異 3 セルモードは直接形成されることはなく、変異 4 セルモードの減衰によって形成されることが確かめられた。

表 5.2 に  $\Gamma = 4.0, Re = 500$  とした場合の計算結果を示す。表 5.2(a) の左から有次元時間増速時間  $T$ 、無次元加速パラメタ  $St$ 、形成されるモード、そのモードの運動エネルギー、エンストロフィ、内円筒、外円筒、上側壁面、下側壁面ででのトルクの値を表している。 $T = 0.65$  では二次モードである変異 4 セルモードが形成され、 $T$  の増加に伴って主モードである正規 4 セルモードが現れる。 $\Gamma = 4.0$  の場合は  $2.6$  の場合と違い、それ以降ずっと正規 4 セルモードが形成されるのではなく、正規 2 セルモード、正規 4 セルモードがばらばらに現れる。つまり、 $\Gamma = 2.6$  の場合はモード境界点が明確であり、各モードが固まって現れるのに対し、 $\Gamma = 4.0$  ではモード境界点が明確でなく、各モードがばらばらに現れる。しかし、 $\Gamma = 2.6$  の場合は  $T$  の変化幅が最小でも  $0.05$  であるのに対し、 $\Gamma = 4.0$  では  $0.01$  と変化幅の最小値が異なるため、 $\Gamma = 2.6$  でも、より  $T$  の変化幅を小さくすれば異なるモードが現

れる可能性はある。このことを結論づけるためには追加計算が必要である。

運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクに着目すると、モードが同じであればそれぞれの値が非常に良く一致している。第4章でも述べたように、モードが同じであっても $z$ 方向中央断面に対する対称性が異なることがある。このような対称性が異なる状態であっても、モードが同じであれば運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクのそれぞれの値は同じであることがわかる。このことを踏まえ、これらの値の大小関係が各モード間でどのようになっているかを調べた。表5.2(b)は正規2セルモード、正規4セルモード、変異4セルモードの代表として $T = 0.85, 0.72, 0.65$ の運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクの値を比較したものである。運動エネルギーの値は変異4セルモード、正規4セルモード、正規2セルモードの順で大きくなり、以下エンストロフィは、変異4セルモード、正規2セルモード、正規4セルモードの順、内側壁面トルクの絶対値は正規2セルモード、変異4セルモード、正規4セルモードの順、外側壁面トルクの絶対値は変異4セルモード、正規2セルモード、正規4セルモードの順、上側壁面、下側壁面トルクの絶対値は正規2セルモード、正規4セルモード、変異4セルモードの順で大きくなる。レイノルズ数650の場合についての計算結果を表5.3に示す。 $Re = 500$ の場合と同じように、 $T$ の増加に伴って形成されるモードにばらつきが見られる。 $Re = 650$ の場合も $Re = 500$ の場合と同じように、各モードでは運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクのそれぞれの値が非常に良く一致している。各モードの運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクの代表値を比較した表を表5.3(b)に示す。運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクの絶対値の大小関係は、 $Re = 500$ の場合と一致している。

表5.4、5.5、5.6はそれぞれ $Re = 700, 800, 1000$ の場合の結果を示す。同じモードでは運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクの値がそれぞれ等しく、それらの値の大小関係も $Re = 500, 650$ の場合と同様の傾向が見られる。

運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクの大小関係が違う理由を考えるため、それぞれの値のレイノルズ数に対する変化を調べる。図5.3は正規2次モードの持つ運動エネルギーのレイノルズ数に対する変化、図5.4は正規2次モードの持つエンストロフィのレイノルズ数に対する変化、図5.5、図5.6、図5.7、図5.8はそれぞれ上側壁面、下側壁面、内側壁面、外側壁面のトルクの絶対値のレイノルズ数に対する変化を示している。運動エネルギーはレイノルズ数の増加に伴って減少するのに対し、エンストロフィ、各壁面トルクの絶対値は増加している。正規4セル、変異4セルの場合も正規2次モードと同様の結果が得られた。この傾向の違いは、アスペクト比の違いによる傾向を探るともう少し明確に現れると思われる。

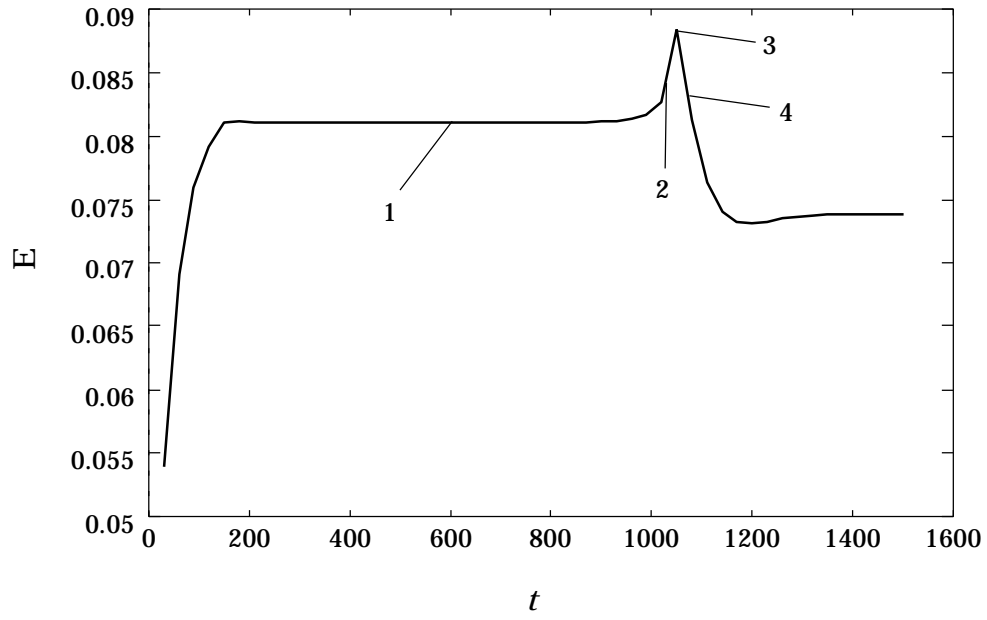


図 5.1: 運動エネルギーの時間変化 ( $\Gamma = 2.6, Re = 500, T = 0.6s$ )

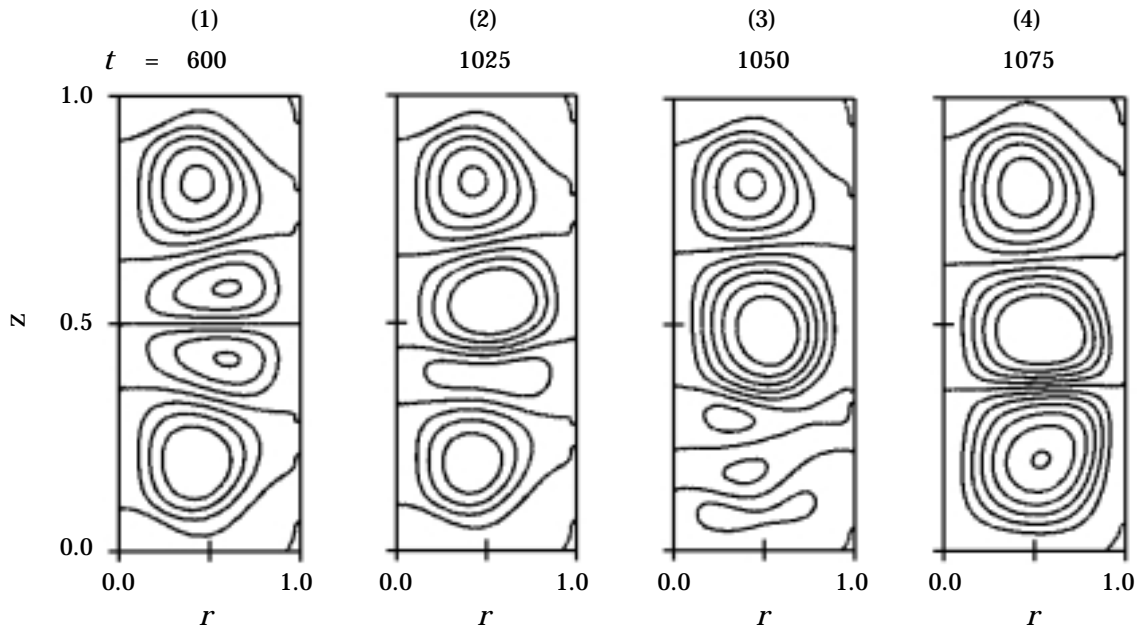


図 5.2: 変異 3 セルモードの形成過程. ( $\Gamma = 2.6, Re = 500, T = 0.6s$ )  
 図の上側の数字は図 5.1 中の時点に相当する.

表5.2: 状態パラメタ ( $\beta=4.0$ ,  $Re=500$ )

(a)

$T(s)$	$St$	Mode	$E$		$N_{in}$	$N_{out}$	$N_{up}$	$N_{low}$
0.65	0.103	A4	7.63	5.71	-661	-385	-137	-138
0.66	0.101	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
0.67	0.100	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
0.68	0.098	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
0.69	0.097	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
0.70	0.095	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
0.71	0.094	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
0.72	0.093	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
0.73	0.091	N2	8.81	5.90	-584	-454	-65	-65
0.74	0.090	N2	8.81	5.90	-584	-454	-65	-65
0.75	0.089	N2	8.81	5.90	-584	-454	-65	-65
0.85	0.078	N2	8.81	5.90	-584	-454	-65	-65
0.90	0.074	N2	8.81	5.90	-584	-454	-65	-65
0.95	0.070	N2	8.81	5.90	-584	-454	-65	-65
1.00	0.067	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
1.20	0.056	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
1.40	0.048	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
1.60	0.042	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
3.00	0.022	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
4.00	0.017	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
5.00	0.013	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
10.00	0.007	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
			$\times 0.01$	$\times 0.1$				

(b)

$T(s)$	$St$	Mode	$E$		$N_{in}$	$N_{out}$	$N_{up}$	$N_{low}$
0.85	0.078	N2	8.81	5.90	-584	-454	-65	-65
0.72	0.093	N4	7.88	6.99	-679	-531	-75	-75
0.65	0.103	A4	7.63	5.71	-661	-385	-137	-138
			$\times 0.01$	$\times 0.1$				

表5.3: 状態パラメタ ( $\omega = 4.0$ ,  $Re=650$ )

(a)

$T(s)$	$St$	Mode	$E$		$N_{in}$	$N_{out}$	$N_{up}$	$N_{low}$
0.002	25.641	A4	7.32	6.71	-739	-434	-151	-151
0.004	12.821	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.006	8.547	A4	7.32	6.71	-739	-434	-151	-151
0.008	6.410	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.010	5.128	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.020	2.564	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.030	1.709	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.040	1.282	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.050	1.026	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.100	0.513	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.120	0.427	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.140	0.366	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.150	0.342	N2	8.51	6.93	-644	-513	-67	-68
0.160	0.321	N2	8.51	6.93	-644	-513	-67	-67
0.180	0.285	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.200	0.256	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.400	0.128	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.600	0.085	A4	7.32	6.71	-739	-434	-151	-151
0.800	0.064	A4	7.32	6.71	-739	-434	-151	-151
1.000	0.051	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
2.000	0.026	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
3.000	0.017	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
4.000	0.013	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
5.000	0.010	N2	8.51	6.93	-644	-513	-66	-67
6.000	0.009	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
7.000	0.007	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
8.000	0.006	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
9.000	0.006	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
10.000	0.005	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
			$\times 0.01$	$\times 0.1$				

(b)

$T(s)$	$St$	Mode	$E$		$N_{in}$	$N_{out}$	$N_{up}$	$N_{low}$
5.000	0.010	N2	8.51	6.93	-644	-513	-66	-67
0.004	12.821	N4	7.57	8.16	-755	-605	-77	-77
0.006	8.547	A4	7.32	6.71	-739	-434	-151	-151
			$\times 0.01$	$\times 0.1$				

表5.4: 状態パラメタ ( $\beta=4.0$ ,  $Re=700$ )

(a)

$T(s)$	$St$	Mode	$E$		$N_{in}$	$N_{out}$	$N_{up}$	$N_{low}$
0.20	0.238	N2	8.43	7.24	-663	-532	-67	-67
0.25	0.190	N2	8.43	7.24	-663	-532	-67	-67
0.30	0.159	N4	7.50	8.51	-779	-628	-78	-78
0.35	0.136	N4	7.50	8.51	-779	-628	-78	-78
0.40	0.119	N2	8.43	7.24	-662	-531	-67	-67
0.45	0.106	N2	8.43	7.24	-663	-532	-67	-67
0.50	0.095	N4	7.50	8.51	-779	-628	-78	-78
0.55	0.087	A4	7.24	7.01	-763	-451	-155	-156
0.60	0.079	A4	7.23	7.01	-763	-450	-155	-156
0.65	0.073	A4	7.24	7.01	-763	-450	-155	-156
0.70	0.068	A4	7.24	7.01	-763	-450	-155	-156
0.75	0.063	A4	7.24	7.01	-763	-450	-155	-156
0.80	0.060	A4	7.23	7.01	-763	-450	-155	-156
			$\times 0.01$	$\times 0.1$				

(b)

$T(s)$	$St$	Mode	$E$		$N_{in}$	$N_{out}$	$N_{up}$	$N_{low}$
0.20	0.238	N2	8.43	7.24	-663	-532	-67	-67
0.30	0.159	N4	7.50	8.51	-779	-628	-78	-78
0.55	0.087	A4	7.24	7.01	-763	-451	-155	-156
			$\times 0.01$	$\times 0.1$				



表5.5: 状態パラメタ ( $\beta=4.0$ ,  $Re=800$ )

(a)

$T(s)$	$St$	Mode	$E$		$N_{in}$	$N_{out}$	$N_{up}$	$N_{low}$
0.20	0.208	A4	7.11	7.59	-810	-480	-164	-164
0.25	0.167	A4	7.11	7.59	-810	-480	-164	-164
0.30	0.139	A4	7.11	7.59	-810	-480	-164	-164
0.35	0.119	N4	7.36	9.17	-824	-671	-79	-79
0.40	0.104	N4	7.36	9.17	-824	-671	-79	-79
0.45	0.093	N4	7.36	9.17	-824	-671	-79	-79
0.50	0.083	N4	7.36	9.17	-824	-671	-79	-79
0.55	0.076	N4	7.36	9.17	-824	-671	-79	-79
0.60	0.069	N2	8.29	7.81	-698	-566	-68	-68
0.65	0.064	A4	7.11	7.59	-810	-480	-164	-164
0.70	0.060	A4	7.11	7.59	-810	-480	-164	-164
0.75	0.056	A4	7.11	7.59	-810	-480	-164	-164
0.80	0.052	A4	7.11	7.59	-810	-480	-164	-164
			$\times 0.01$	$\times 0.1$				

(b)

$T(s)$	$St$	Mode	$E$		$N_{in}$	$N_{out}$	$N_{up}$	$N_{low}$
0.60	0.069	N2	8.29	7.81	-698	-566	-68	-68
0.35	0.119	N4	7.36	9.17	-824	-671	-79	-79
0.20	0.208	A4	7.11	7.59	-810	-480	-164	-164
			$\times 0.01$	$\times 0.1$				

表5.6: 状態パラメタ ( $\omega = 4.0$ ,  $Re=1000$ )

(a)

$T(s)$	$St$	Mode	$E$		$N_{in}$	$N_{out}$	$N_{up}$	$N_{low}$
0.05	0.667	A4	6.92	8.61	-900	-536	-180	-181
0.10	0.333	N4	7.16	10.33	-908	-753	-82	-82
0.15	0.222	N4	7.16	10.33	-908	-753	-82	-82
0.20	0.167	N4	7.16	10.33	-908	-753	-82	-82
0.25	0.133	A4	6.92	8.61	-900	-536	-180	-181
0.30	0.111	A4	6.92	8.61	-900	-536	-180	-181
0.35	0.095	A4	6.92	8.61	-900	-536	-180	-181
0.40	0.083	A4	6.92	8.61	-900	-536	-180	-181
0.45	0.074	A4	6.92	8.61	-900	-536	-180	-181
0.50	0.067	A4	6.92	8.61	-900	-536	-180	-181
0.55	0.061	A4	6.92	8.61	-900	-536	-180	-181
0.60	0.056	N4	7.16	10.33	-908	-753	-82	-82
0.80	0.042	N4	7.16	10.33	-908	-753	-82	-82
0.90	0.037	N4	7.16	10.33	-908	-752	-82	-82
1.00	0.033	A4	6.92	8.61	-900	-536	-180	-181
1.20	0.028	A4	6.92	8.61	-900	-536	-180	-181
1.50	0.022	N4	7.16	10.33	-908	-753	-82	-82
2.00	0.017	N2	8.07	8.82	-763	-631	-70	-70
3.00	0.011	N4	7.16	10.33	-908	-752	-82	-82
4.00	0.008	N2	8.07	8.82	-763	-631	-70	-70
5.00	0.007	N4	7.16	10.33	-908	-752	-82	-82
10.00	0.003	N4	7.16	10.33	-908	-752	-82	-82
			$\times 0.01$	$\times 0.1$				

(b)

$T(s)$	$St$	Mode	$E$		$N_{in}$	$N_{out}$	$N_{up}$	$N_{low}$
2.00	0.017	N2	8.07	8.82	-763	-631	-70	-70
0.10	0.333	N4	7.16	10.33	-908	-753	-82	-82
0.25	0.133	A4	6.92	8.61	-900	-536	-180	-181
			$\times 0.01$	$\times 0.1$				

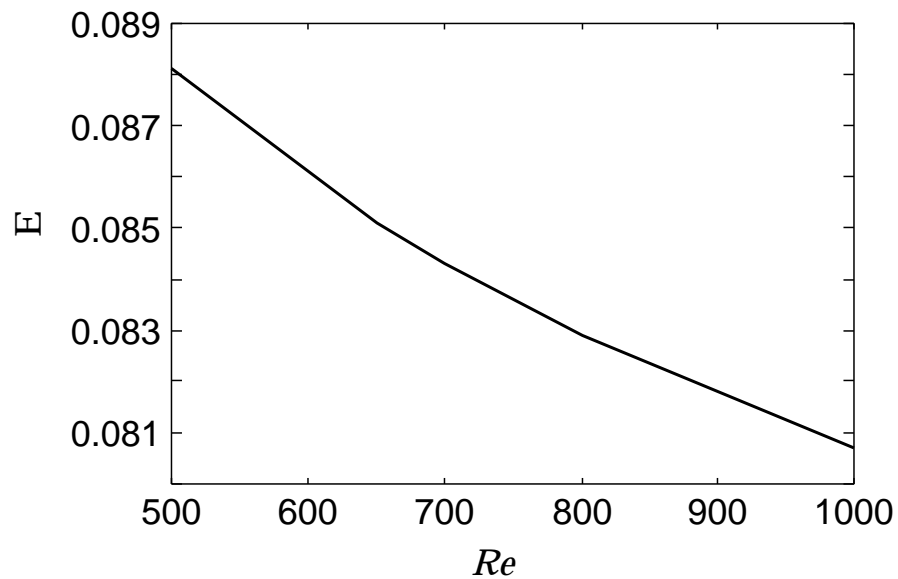


図 5.3: 正規 2 セルモードの持つ運動エネルギーのレイノルズ数に対する変化 ( $\Gamma = 4.0$ )

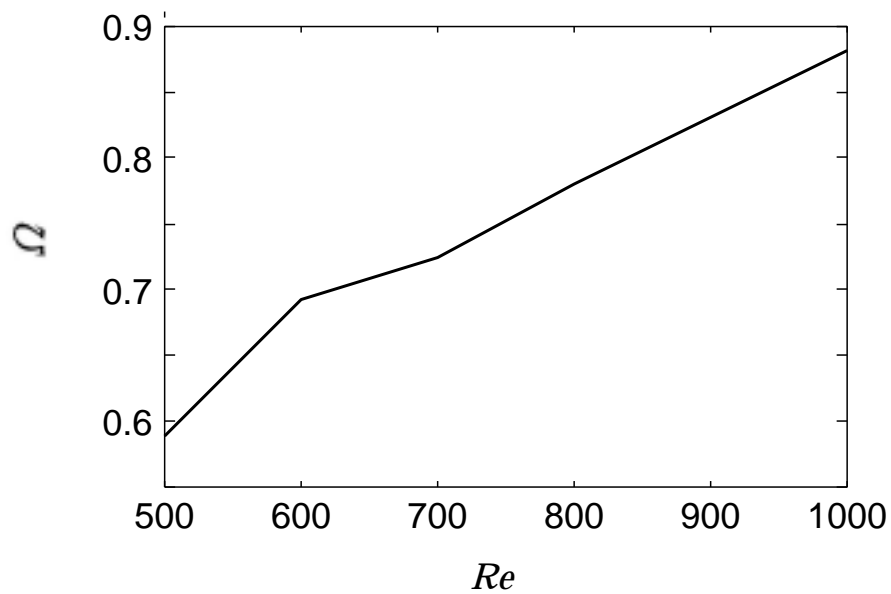


図 5.4: 正規 2 セルモードの持つエンストロフィのレイノルズ数に対する変化 ( $\Gamma = 4.0$ )

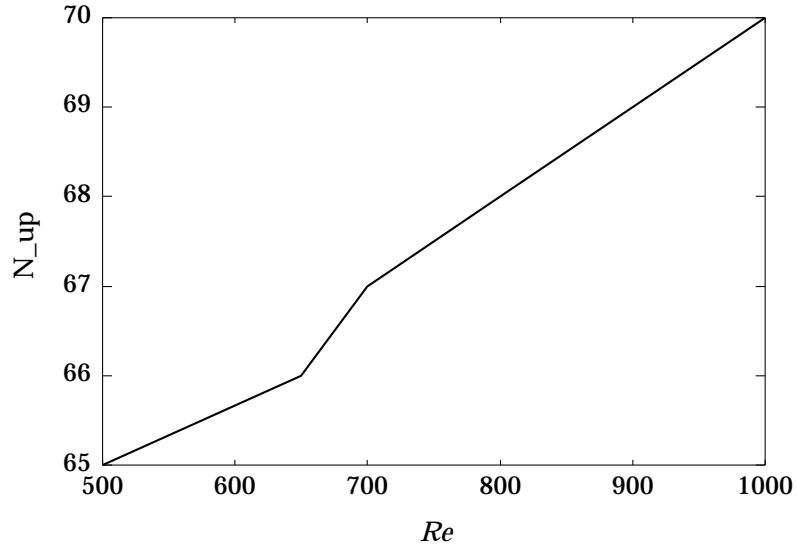


図 5.5: 正規 2 セルモードの持つ上側壁面トルクの絶対値のレイノルズ数に対する変化 ( $\Gamma = 4.0$ )

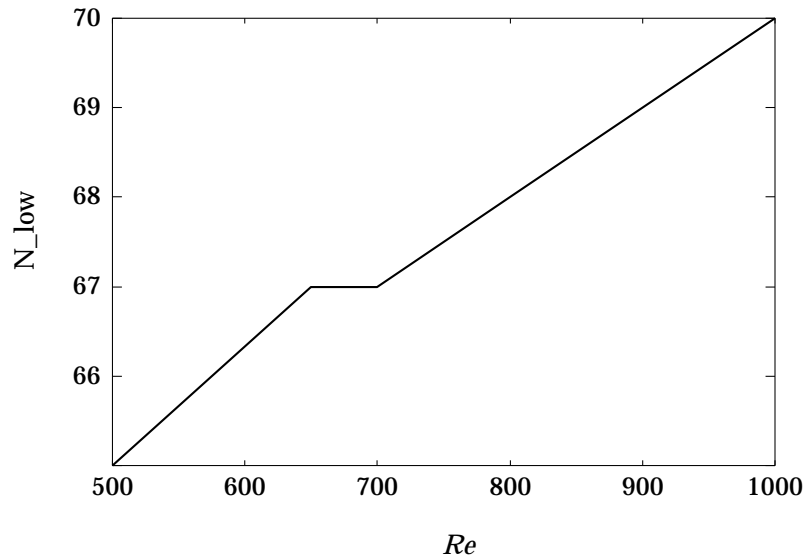


図 5.6: 正規 2 セルモードの持つ下側壁面トルクの絶対値のレイノルズ数に対する変化 ( $\Gamma = 4.0$ )

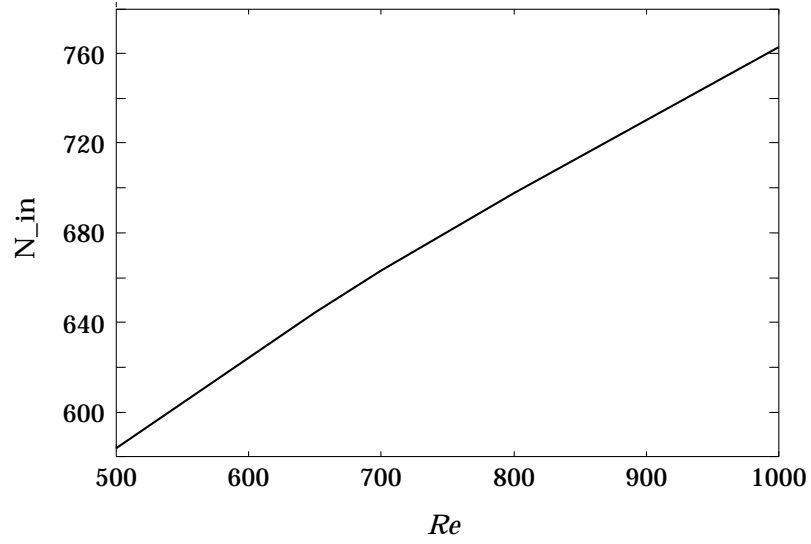


図 5.7: 正規 2 セルモードの持つ内側壁面トルクの絶対値のレイノルズ数に対する変化 ( $\Gamma = 4.0$ )

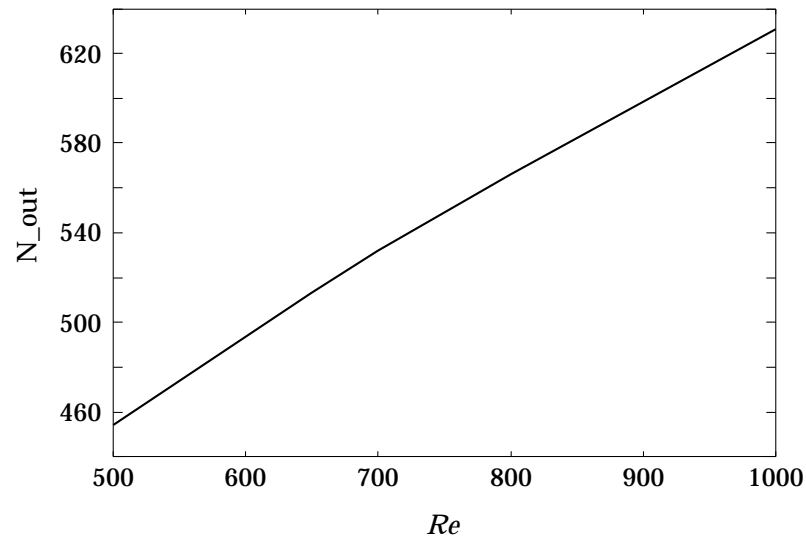


図 5.8: 正規 2 セルモードの持つ外側壁面トルクの絶対値のレイノルズ数に対する変化 ( $\Gamma = 4.0$ )

## 第6章 結論

有限長の両端固定端とした回転二重円筒間に生じるテイラー渦を数値実験により解析し、得られた結果を物理実験結果と比較することにより、以下のような結論を得た。

- 初期条件を厳密クエット流、静止流体として流れが十分発達した時に現れるモードを観察した。厳密クエット流を初期条件とした場合は、各モードのばらつきが少なく、モードの境界が明確である。静止流体を初期条件とした場合は、変異セルモードが現れる範囲が広がり、これまで観察されていなかった変異3、7、8セルモードが現れる。このことは、アスペクト比、レイノルズ数という物理条件が同じでも計算の初期条件が違ふことによって、生ずるモードが異なるというテイラー渦の非一意性を示すものである。
- アスペクト比が1付近と非常に小さい場合のテイラー渦の挙動を観察し、物理実験で存在が確認されている、正規2セルモード、変異1セルモード、ツインセルモードの存在を確認した。正規2セルモードについて、流れは軸方向中央断面に対して常に対称というわけではなく、非対称なモードも存在する。変異1セルモードについて、変異セルは内円筒側と外円筒側にエクストラ渦を伴っている。ツインセルモードについて、このモードはこれまで物理実験でしか確認されておらず、数値実験によって存在を確認したのは本研究がはじめてである。以上挙げた3つのモードの計算結果は、物理実験の流れの様子とよく一致している。さらに、流れが十分発達した状態から内円筒速度を減少させることにより、各モード間の分岐現象を観察し、モード変化が起こるアスペクト比とレイノルズ数の範囲を決定した。
- 内円筒速度の増速割合がモード形成に及ぼす影響を、アスペクト比2.6, 4.0の2つの場合について、レイノルズ数を変化させて調べ、運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクの値をそれぞれ比較した。アスペクト比が2.6の場合、十分発達した流れが持つモードが増速割合により明確に分かれる。アスペクト比が4.0の場合、アスペクト比が2.6の場合のように明確なモード境界点が存在するのではなく、各モードがばらばらに生ずる。運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクの値は、同一モードであればそれぞれ良く一致している。運動エネルギー、エンストロフィ、各壁面トルクの絶対値のレイノルズ数に対する変化は、エンストロフィ、トルクの絶対値がレイノルズ数の増加に伴って増加するのに対し、運動エネルギーは減少する。

## 第7章 謝辞

本研究の遂行にあたり終始適切な御指導、御助言を賜りました名古屋大学情報メディア教育センター、渡辺崇教授に深甚なる謝意を表します。また、数々の有益な御助言を賜わっただけでなく、追加実験を快く受けてくださり、貴重な実験結果を提供してくださった長野工業高等専門学校の戸谷順信助教授に厚く御礼申し上げます。さらに、2年間に渡り自由に機材を利用させて下さいました名古屋大学情報文化学部横澤肇教授、大学院人間情報学研究科峯村吉泰教授、横井茂樹教授に厚く御礼申し上げます。最後に情報処理論講座において苦楽を共にし、有益な御助言、御助力賜りました同輩諸氏に深く感謝の意を表します。

## 関連図書

- [1] Anson, D. K., Mullin, T., and Cliffe, K. A., 1989, "A numerical and experimental investigation of a new solution in the Taylor vortex problem," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 207, pp. 475-487.
- [2] Anson, D. K., and Cliffe, K. A., 1989, "A numerical investigation of the Schaeffer homotopy in the problem of Taylor-Couette flows," *Proceedings of the Royal Society of London, A*, Vol. 426, pp. 331-342.
- [3] Benjamin, T. B., and Mullin, T., 1981, "Anomalous mode in the Taylor experiment," *Proceedings of the Royal Society of London, A*, Vol. 377, pp. 221-249.
- [4] Bielek, C. A., and Koschemieder, E. L., 1990, "Taylor vortices in short fluid columns with large radius ratio," *Physics of Fluids, A*, Vol. 2-9, pp. 1557-1563
- [5] Bolstad, J. H., and Keller, H. B., 1987, "Computation of Anomalous Modes in the Taylor Experiment," *Journal of Computational Physics*, Vol. 69, pp. 230-251.
- [6] Cliffe, K. A., 1983, "Numerical calculation of two-cell and single cell Taylor flow," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 135, pp. 219-233.
- [7] Cliffe, K. A., 1988, "Numerical calculations of the primary-flow exchange process in the Taylor problem," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 197, pp. 57-79.
- [8] Cliffe, K. A., Kobine, J. J., and Mullin, T., 1992, "The role of anomalous modes in Taylor-Couette flow," *Proceedings of the Royal Society of London, A*, Vol. 439, pp. 341-357.
- [9] Cole, J.A., 1976, "Taylor-vortex instability and annulus-length effect," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 75, pp. 1-15.
- [10] Lim, T. T., and Xiao, Q., 1998, "a New Flow Regime in a Taylor-Couette Flow," *Physics of Fluids*, Vol. 10-12, pp. 3233-3225.
- [11] Mullin, T., and Benjamin, T. B., 1980, "Transition to Oscillatory Motion in the Taylor Experiment," *Nature*, Vol. 288, pp. 557-560.



- [12] Nakamura, I., Toya, Y., Yamashita, S., and Ueki, Y., 1989, "An experiment on a Taylor vortex flow in a gap with a small aspect ratio (instability of Taylor vortex flows)," *JSME International Journal, Series II, Vol. 32*, pp. 338-394.
- [13] Nakamura, I., and Toya, Y., 1996, "Existence of extra vortex and twin vortex of anomalous mode in Taylor vortex flow with a small aspect ratio," *Acta Mechanica, Vol. 117*, pp. 33-46.
- [14] Pfister, G., Schmidt, H., Cliffe, K.A., and Mullin, T., 1988, "Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow in a very short annulus," *Journal of Fluid Mechanics, Vol. 191*, pp. 1-18.
- [15] Schaeffer, D. G., 1980, "Analysis of a model in the Taylor problem," *Math. Proc. Camb. Philos. Soc., Vol. 87*, pp. 307-337.
- [16] Taylor, G.I., 1923, "Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders," *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A, Vol. 223*, pp. 289-343.
- [17] Toya, Y., Nakamura, I., Yamashita, S., and Ueki, Y., 1994, "an Experiment on a Taylor Vortex Flow in a Gap with Small Aspect Ratio," *Acta Mechanica, Vol. 102*, pp. 137-148.
- [18] Watanabe, T., and Maeda, S., 1997, "Bifurcation phenomena in decelerating Taylor vortex F with small aspect ratio," *Proceedings of International Conference on Fluid Engineering, ICFE '97, Vol. 1*, pp. 551-556.
- [19] Werely, S. T., and Lueptow, R. M., 1998, "Spatio-Temporal Character of Non-Wavy and Wavy Taylor-Couette Flow," *Journal of Fluid Mechanics, Vol. 364*, pp. 59-80.
- [20] 東・小河原・飯田, 1991, "回転二重円筒管内流れの非定常三次元計算," *機論, B, Vol. 57-535*, pp. 905-913.
- [21] 東・小河原・飯田, 1992, "テイラー渦流れの変異モード発生機構に関する数値的研究," *機論, B, Vol. 58-555*, pp. 3245-3250.
- [22] 戸谷・中村・山下・植木, 1990, "アスペクト比が小さいテイラー渦の実験 (自由端の場合の流れの分岐)," *機論, B, Vol. 56-532*, pp. 3617-3624.
- [23] 戸谷・中村・山下・植木, 1992, "アスペクト比が小さいテイラー渦の変異モードにおけるエクストラ渦とツイン渦の存在)," *機論, B, Vol. 58-546*, pp. 305-312.
- [24] 戸谷・中村, 1997, "二液テイラー渦流れの不安定性 (円筒の両端が固定端の場合)," *機論, B, Vol. 63-612*, pp. 2629-2637.
- [25] 中村・戸谷・山下・植木, 1988, "アスペクト比が小さいテイラー渦の実験 (自由端と固定端の場合の比較)," *機論, B, Vol. 54-504*, pp. 1898-1905.

- [26] 中村・戸谷・山下・植木, 機論, 1988, “アスペクト比が小さいテイラー渦の実験 (テイラー渦の不安定性),” 機論, B, Vol. 54-505, pp. 2425-2432.
- [27] 中村・戸谷・山下・植木, 1990, “アスペクト比が小さいテイラー渦の実験 (固定端の場合の流れの分岐),” 機論, B, Vol. 56-522, pp. 307-313.
- [28] 中村・戸谷, 1994, “多重解テイラー渦におけるモード形成条件,” 機論, B, Vol. 60-571, pp. 723-729.
- [29] 前田, 1998, “テイラー渦流れのモード形成と分岐に関する数値的研究,” 名古屋大学修士論文.