

クリティカル・シンキングの理論と実践

久木田 水生

2019 年 10 月 15 日

はじめに

このテキストは大学生に、論理的に考え、論証するための一般的かつ初等的な知識と技術を身につけさせることを目的としている。

このテキストは特定の学問分野としての記号論理学、形式論理学について教えるものではなく、私たちが他人の論証の正しさを判断したり、自分で論証を組み立てたりする際に必要な実践的知識・技術を教えるものである。そのような知識・技術は皆さんがどのような分野を専攻するにせよ、そして将来どのような職業に就くにせよ、きっと役立てることができるだろう。

一つ例題から始めよう。次の文章を読んで欲しい。

例文 0.1. 論理とは正しい推論の道筋のことです。推論は人間の知的活動において中心的な役割を果たすものであり、実際、私たちの持つ重要な認識の多くは推論によって獲得されています。したがって正しい認識を獲得するために私たちは論理を学ぶ必要があるのです。

この文章を読んで皆さんはどう思っただろうか？ なるほどその通りと納得した人はもう少し慎重になる必要がある。この論証は一見もっともらしく見えるが、実は重大な論理的誤りを含んでいるのである。このような一見もっともらしいが、実際には誤った論証を見破る能力を身につけることがこの講義の目的の一つである。

例題の答えの前に、次の文章についても考えてみよう。

例文 0.2. 名古屋駅からは地下鉄東山線で本山駅までいけます。名古屋大学には本山駅から歩いていくことができます。従って名古屋駅から名古屋大学に行くには地下鉄東山線に乗る必要があります。

この論証が誤っているのは十分に明らかだろう。確かに名古屋駅から地下鉄東山線にのって名古屋大学に行くことはできる。しかし名古屋駅から名古屋大学に行くには地下鉄東山線に乗る以外にも方法はある。桜通線と名城線を使っても良い。自分で自動車を運転しても良い。頑張れば自転車でも行けないことはない。従ってこの論証は誤りである。

実はこの例文 0.1 と例文 0.2 の論証において使われている推論の構造は等しい。その構造を分かりやすく示すと次のようになる。

A をすれば B が得られる。

B を得るためには A をする必要がある。

この形式の推論が一般には成り立たないことは例文 0.2 が示すとおりである。従って例文 0.1 もまた正しくない推論を用いた論証だということになる。

同じ形式であるのに、多くの人にとって例文 0.1 は例文 0.2 よりももっともらしく聞こえる。ここから分かるのは私たちの思考能力は論理という抽象的・形式的なもの以外の様々なものによって影響を受けている。そのような影響のあるものは有益であり、あるものは有害である。かつそれはその影響が現れる状況にも依存している。

問題 0.1. 上の二つの推論と同じ形式を持つ推論の例を考えなさい。

目次

第 1 章	推論	1
1.1	論理的な推論の例	1
1.2	論理的な推論とは何か	10
1.3	哲学への寄り道	17
第 2 章	記号論理	19
2.1	推論を記号で表現する	19
2.2	形式言語の意味	27
2.3	分析的反証法	33
2.4	自然言語と論理学のギャップ	35
2.5	哲学への寄り道	36
第 3 章	妥当な推論の判定方法	39
3.1	三段論法とルイス・キャロルの論理ゲーム	39
3.2	命題論理とエルブランの書き換えアルゴリズム	43
3.3	タブローとは	46
3.4	タブローの規則	48
3.5	タブローの実例	50
3.6	哲学への寄り道	56
第 4 章	誤謬	59
4.1	論理的誤謬	59
4.2	非論理的誤謬	61
第 5 章	論証	65
5.1	論証の評価	66
5.2	暗黙の前提	70
5.3	分かりやすい文章、分かりにくい文章	71
5.4	エッセイの形式	75
第 6 章	非演繹的推論	79

6.1	様々な推論	79
6.2	帰納と類推の評価	81
6.3	統計的相関と因果関係	84
第 7 章	合理的意思決定	89
7.1	意思決定とリスク	89
7.2	合理性と感情	92
7.3	疑うことと信頼すること	95
第 8 章	終わりに――信頼の効用	97
第 9 章	付録：集合論の基礎知識	99

第 1 章

推論

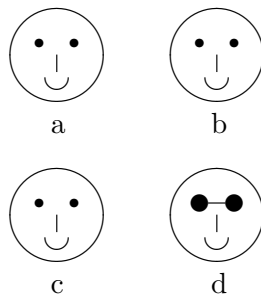
本書の主要な目的は、正しく推論し論証する技術を訓練することである。そのためにはまず正しい推論、正しい論証（および間違った推論、間違った論証）とは何かということを知らなければならない。さらにその前にはそもそも推論、論証とは何かということを知らなければならない。この章では推論と論証の違い、そして推論の正しさの基準について説明しよう。

1.1 論理的な推論の例

まずはちょっとしたパズルから始めよう。

例 1.1. 与えられた図と証言をもとに、White、Orange、Red、Blue の 4 人が図のどこにいるかを推理してみよう。ただし以下の証言において、「X が Y に接する」というのは X が Y の上下左右のどこかにいるとき、「X が Y の隣にいる」というのは X が Y の左右どちらかにいるときである。

(1)



証言 1 : 「Blue はサングラスを掛けていない」

証言 2 : 「Orange はサングラスを掛けた者に接していない」

証言 3 : 「White は Orange の隣にいる」

証言 4 : 「Red は White の上下にはいない」

解答：a-Blue、b-Red、c-White、d-Orange。

この問題は比較的簡単に解が出せるように思われる。しかし実のところこの解に到るまでの過程にはなかなか複雑な論理的推論が含まれている。この解を導出する一つの過程を簡単に記述してみよう。

1. 証言 2 から Orange は a か d のどちらかであることが決定する。
2. そこで Orange が a だと仮定する。
3. このとき証言 3 から White は b になる。
4. 従って証言 4 より Red は c ということになる。
5. 従って残る Blue は d になる。
6. しかしこれは証言 1 と矛盾する。
7. 従って Orange は a であるという仮定は誤りである。
8. 従って Orange は d であることになる。
9. このとき証言 3 より White が c であることが分かる。
10. 従って証言 4 より Red が b であることになる。
11. 従って残る Blue が a になる。

ここで使われている重要な論理的推論の規則をいくつか挙げてみよう。上では 2 の仮定から矛盾が生じることが示され、それによって 2 が否定されている。このように、あることを仮定することによって矛盾が導かれるならば、その仮定の否定を結論してよい。これを背理法と呼ぶ。

1 で Orange が a または d であることが主張され、7 で Orange が a であることが否定されていることから Orange が d であることが導かれている。このように、二つの選択肢があり、その一方の可能性がないとすれば、他方を結論してよい。さらに一般的に言えば、複数の選択肢があり、そのひとつの選択肢の可能性がないとすれば、残りのどれかが成り立つことを結論してよい。これを選言三段論法と呼ぶ。

以下で良く使われる推論規則を挙げておく。A、B は任意の言明、非 A、非 B 等はその否定を表わすことにする。

- **R1**（二重否定律）：非 A が成り立たないということから、A を推論してもよい。
- **R2**（前件肯定）：A ならば B が成り立っており、かつ A が成り立っているということから、B を推論してもよい。
- **R3**（後件否定）：A ならば B が成り立っており、かつ非 B が成り立っているということから、非 A を推論してもよい。
- **R4**（背理法）：A を仮定して B と非 B の両方が導かれるということから、非 A を推論してもよい。
- **R5**（選言三段論法）：A または B のどちらかが成り立ち、さらに非 A が成り立っているということから、B を推論してもよい。
- **R6**（ド・モルガンの法則 1）：A と B が同時には成り立たないということから、

非 A または非 B のどちらかが成り立つことを推論してもよい。逆も同様。

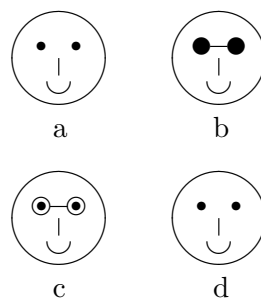
- **R7** (ド・モルガンの法則 2) : A か B のどちらかが成り立つということはないということから、非 A かつ非 B を推論してもよい。逆も同様。
- **R8** (対偶律) : A ならば B が成り立っているということから、非 B ならば非 A を推論してもよい。逆も同様。
- **R9** (排中律) : A か非 A のどちらかが成り立つということを推論してもよい。
- **R10** (矛盾律) : A と非 A の両方が成り立つということはないということを推論してよい。つまり A と非 A の両方が成り立つということは矛盾であると推論してもよい。
- **R11** (ジレンマ) : A または B が成り立っており、かつ A と B のいずれを仮定しても C が導かれるならば、 C が成り立つことを推論して良い。

これらの規則以外にも、重要な論理規則はある。厳密な形式論理学の議論をするならば全ての推論規則を明示する必要があるが、とりあえずここではそうしない。またこれらの規則のあるものは他の規則によって置き換えが可能である。例えば二重否定律は、選言三段論法と排中律から帰結する。ただしここでは規則の数を最少限することが目的ではなく、規則を実際に適用して問題を解決することが目的なので、この点にも立ち入らない。論理的な推論規則の完全なリストに関しては後で扱う。

では実際に問題を解いてみよう。

問題 1.1. 上の例と同様に、図と証言から、誰が図のどこにいるかを推理せよ。またその推論の過程を詳しく書き出し、上の推論規則が使われているときはそのことを明記せよ。

(1)



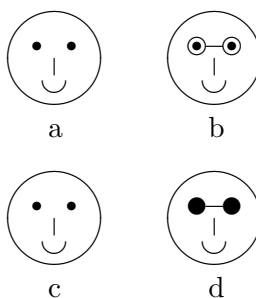
証言 1 : 「Red と Orange のどちらかはメガネを掛けている」

証言 2 : 「Blue は Orange の隣にいるか Red の隣にいるかのどちらかである」

証言 3 : 「Blue はメガネかサングラスのどちらかを掛けている」

証言 4 : 「Red と Blue は接していない」

(2)



証言 1 : 「Orange と Red の両方がメガネを掛けていないということはない」

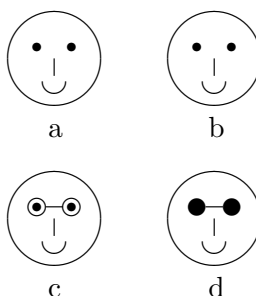
証言 2 : 「White と Red は隣り合っていない」

証言 3 : 「White がサングラスを掛けていないならば Blue はメガネを掛けている」

証言 4 : 「Blue は Red の上にいるか White の隣にいるかのどちらかである」

証言 5 : 「Orange と Blue は接していない」

(3)



証言 1 : 「Red と Blue の少なくとも一方はメガネかサングラスを掛けている」

証言 2 : 「Orange は Blue か White の上下にいる」

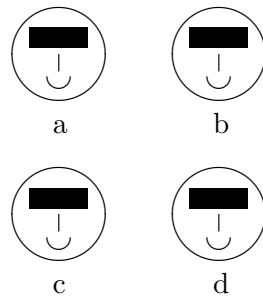
証言 3 : 「Red は Orange の隣にはいない」

証言 4 : 「White は Red の下にいるか左にいるかのどちらかである」

証言 5 : 「Orange と Blue の両方がメガネもサングラスも掛けていないということはない」

以上で使われた推論規則は全て**命題論理**と呼ばれる分野の推論規則である。命題論理においては、私たちは個々の言明（命題）を単位として扱い、それらの命題に「かつ」「または」「ではない」「ならば」などの論理結合子を適用して新しい命題を作り、そのようにして出来た命題の性質を研究する。上の問題は全て命題論理の範囲で解決できる問題である。しかし命題論理の推論規則だけでは扱えない問題を作ることも出来る。

例 1.2. 以下の証言をもとに図の誰がサングラスを掛けており、誰が掛けていないかを推論しよう。



証言 1 : 「少なくとも一人、サングラスを掛けているものがいる」

証言 2 : 「サングラスを掛けている者すべての上にはサングラスを掛けていないものがある」

証言 3 : 「サングラスを掛けている者すべての左にはサングラスを掛けていないものがある」

解答 : a、b、c はサングラスを掛けていない。d はサングラスを掛けている。

この解は次のような推論の過程で導かれる。

1. a、b、c、d のいずれもサングラスを掛けていないとする。
2. このとき、すべての人がサングラスを掛けていないことになる。
3. 従ってサングラスを掛けているものはいない。
4. しかしこれは証言 1 に反する。
5. 従って a、b、c、d のいずれもサングラスを掛けていないということはない。
6. 従って a、b、c、d のうちの誰かはサングラスを掛けている。
7. a がサングラスを掛けているとする。
8. このとき証言 2 より、a の上にはサングラスを掛けていないものがあるということになる。
9. 従って a、b、c、d のうちの誰かは a の上にいて、かつその者はサングラスを掛けていない。
10. しかし図から分かるように a も b も c も d も a の上にはいない。
11. 従って a、b、c、d のうちの誰かが a の上にいるということはない
12. これは矛盾である
13. よって a はサングラスを掛けていない
14. b がサングラスを掛けているとする。
15. このとき証言 2 より、b の上にはサングラスを掛けていないものがあるということになる。
16. 従って a、b、c、d のうちの誰かは b の上にいて、かつその者はサングラスを掛けていない。
17. しかし図から分かるように a も b も c も d も b の上にはいない。
18. 従って a、b、c、d のうちの誰かが b の上にいるということはない

19. これは矛盾である
20. よって b はサングラスを掛けていない
21. c がサングラスを掛けているとする。
22. このとき証言 3 より、c の左にはサングラスを掛けていないものがあるということになる。
23. 従って a、b、c、d のうちの誰かは c の左にいて、かつその者はサングラスを掛けていない。
24. しかし図から分かるように a も b も c も d も c の左にはいない。
25. 従って a、b、c、d のうちの誰かが c の左にいるということはない
26. これは矛盾である
27. よって c はサングラスを掛けていない
28. よって d はサングラスを掛けている

ポイントは「全ての...」とか「...が存在する」といった表現である。このような表現を含む言明についての規則の取り扱いは命題論理の範囲を超えている。これらは一階述語論理で取り扱われなければならない。命題論理が言明を単位として扱うのに対して、述語論理は言明を、対象名（個体を指示する記号）と述語（属性を指示する記号）に分析して扱う。ここでは述語論理で用いられる以下の規則を挙げておこう。

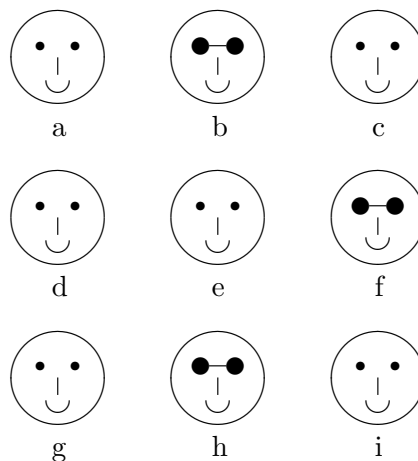
- **R12（特称一般化）**：考慮している対象のあるものが条件 C を満たすということから、考慮している対象のなかに C を満たすものが存在するということを推論してよい。
- **R13（特称消去）**：考慮している対象のうちの任意の x が C を満たすという仮定から結論 D が導けるということと、考慮している対象のなかに条件 C を満たすものが存在するということから、D を推論してよい。ただしここで D は x に言及しない言明であり、かつ x が C を満たすという以外に x についての仮定に依存せずに導かれているものとする。
- **R14（全称特例化）**：考慮している対象すべてについて条件 C が成り立つということから、考慮している対象のどれについても C が成り立つことを推論してよい。
- **R15（全称導入）**：任意の対象について条件 C が成り立つならば、すべての対象について C が成り立つことを推論してよい。
- **R16（一般化されたド・モルガンの法則 1）**：全ての対象が条件 C を満たすわけではない、ということから C を満たさない対象が存在することを推論してよい。逆も同様。
- **R17（一般化されたド・モルガンの法則 2）**：条件 C を満たす対象が存在しないということから、どの対象も C を満たさないということを推論してよい。逆も同様。
- **R18（肯定三段論法）**：M を満たす対象すべてが P を満たすということと、S を満たす対象のすべてが M を満たすということから、S を満たす対象のすべてが P を満たすということを結論してよい。

- **R19（否定三段論法）**：P を満たす対象すべてが M を満たすということと、S を満たす対象のすべてが M を満たさないということから、S を満たす対象のすべてが P を満たさないということを結論してよい。

上の論証では 2 において R15、3 において R17（の逆向き）が使われており、8、15、22 では R14 が使われている。8 から 9、15 から 16、22 から 23 に掛けては 1-3 と同様の推論が行われている。

さて、以上の問題に関して、論理的な推論規則を使うことによって解を発見することができることを私たちは見てきた。誰が図のどこにいるかを考える問題は、図の 4 箇所 に 4 人の人間を並べる問題であるから、可能な配列は 4 の階乗通り、つまり $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通り存在する。また誰がサングラスを掛けており、誰が掛けていないかを推理する問題では、4 人のそれぞれについてサングラスを掛けている可能性と掛けていない可能性があり、従って全部で 16 通りの可能性がある。従って前者の問題に関しては 24 通りの可能性全てについて、後者については 16 通りの可能性の全てについて、証言と矛盾しないかどうかを調べることによっても解くことが出来る。実際、前問の (2) などはそのように解いた方が早く解けるかもしれない。しかし問題がより複雑になると、そのような枚挙による方法では効率が悪い。次の例を考えてみよう。

例 1.3. 与えられた図と証言をもとに、Violet、White、Orange、Blue、Pink、Yellow、Green、Scarlet、Red の 9 人が図のどこにいるか推理しよう。



証言 1：「Pink はサングラスを掛けた者に接していない」

証言 2：「Blue の隣の隣にはサングラスを掛けていない者（Blue 本人ではない）がいる」

証言 3：「Violet は Pink の上にいる」

証言 4：「Red は Blue の斜め上にいる」

証言 5：「Green と White は同じ横列にいる」

証言 6：「Yellow は Red の下の下にいる」

証言 7：「Scarlet は White と同じ縦列にいる」

解答：a-Violet、b-Red、c-Scarlet、d-Pink、e-Orange、f-Blue、g-Green、h-Yellow、i-White。

この問題では9箇所に9人を配置しなければならない。可能な並べ方は9の階乗通り、すなわち362,880通りある。この配置をひとつずつ証言と照らして正しい配置を探すのはあまりにも非効率的である。このような場合はやはり与えられた証言から徐々に条件を狭めていく方が良い。

この解は次のような推論によって導かれる。

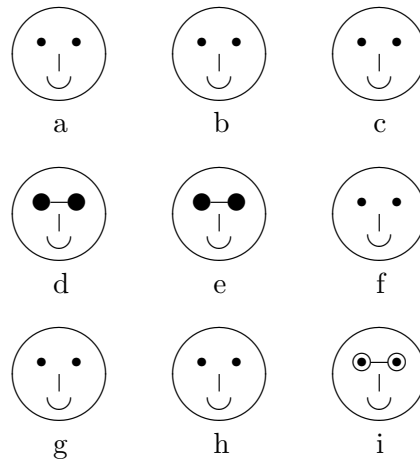
まずBlueの位置を考えよう。証言6よりRedはa、b、cのどれかである。従って証言4よりBlueはd、e、fのどれか。これと証言2よりBlueはfであると決定できる。またこれよりRedはbであることが分かる。さらに証言6よりhはYellowと決まる。

次にPinkについて考えよう。証言1よりPinkはb、d、f、hのどれか。しかしb、f、hは既にそれぞれRed、Blue、Yellowと決まっているのでPinkはdである。これと証言3よりaはVioletであると分かる。

残りについては証言5と7から直ちにcがScarlet、gがGreen、iがWhiteであると決定できる。

問題 1.2. 上の例と同様、図と証言をもとに誰が図のどこにいるかを推理せよ。

(1)



証言1：「Redはメガネかサングラスを掛けている」

証言2：「PinkはWhiteに接している」

証言3：「ScarletとBlueは同じ横列にいる」

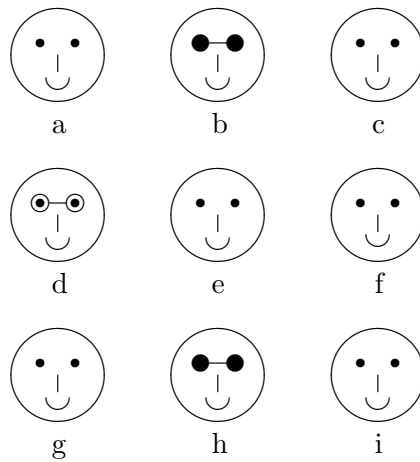
証言4：「Yellowの隣にはサングラスを掛けている者がいる」

証言5：「YellowとVioletは同じ横列にいる」

証言6：「WhiteはScarletとRedにはさまれている（ただし縦、横、斜めのどれかは分からない）」

証言7：「OrangeはYellowの上にいる」

(2)



証言 1 : 「White と Scarlet は隣り合っている」

証言 2 : 「Violet は横列の端にいる」

証言 3 : 「Pink はメガネを掛けた者とサングラスを掛けた者の両方に接している」

証言 4 : 「Pink と Green は同じ横列にいる」

証言 5 : 「Scarlet はサングラスを掛けた者とは接していない」

証言 6 : 「Pink は Violet の下にいる」

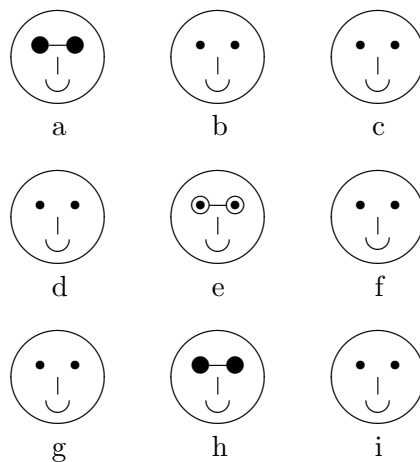
証言 7 : 「Yellow は Blue と Violet の両方に接している」

証言 8 : 「Blue と Red は同じ横列にいる」

証言 9 : 「Blue はサングラスを掛けた者とは接していない」

証言 10 : 「Orange はサングラスを掛けていない」

(3)



証言 1 : 「Orange は四隅のどこかにいる」

証言 2 : 「Red は Blue と接していない」

証言 3 : 「Scarlet は Green と同じ横列にいる」

証言 4 : 「White はサングラスを掛けていなければメガネを掛けている」

証言 5 : 「Violet はサングラスを掛けた者に接していない」

証言 6 : 「Orange は Violet と同じ横列にいる」

証言 7 : 「White は Green か Red の上にいる」

証言 8 : 「Pink と Red は同じ横列にいる」

証言 9 : 「Violet は少なくとも 3 人に接している」

証言 10 : 「Blue は Scarlet よりも接している相手の数が多い」

証言 11 : 「Yellow は Red と接している」

以上の問題はすべて解が一意的に定まるように作られている。しかし証言の与え方によっては解が一意的に定まらないような問題を作ることもできる。解が一意的に定まるようにしながら、ある程度の難易度を問題に持たせるためには相応の工夫が必要である。そこで次の問題を考えてもらおう。

問題 1.3. 上の問題に習って、論理パズルの問題を作れ。その際、解が一意的に定まるように気をつけること。コツは、最初に簡単に解が分かるような証言を作っておいて、後から複雑にしていくことである。

1.2 論理的な推論とは何か

前節で見たパズルはすべて、論理的な推論だけを使って必ず一意的に答えが導けるものである。ほとんどの読者はこれらの問題を難なく（問題によっては多少の時間をかけて）解くことができただろう。その時、読者は論理的な推論を使っていたのである。しかしながらある前提からある結論が論理的に導かれるのかどうかの判断は場合によってはそれほど明らかではない。そこで以下では論理的な推論とはどのようなものであり、論理的でない推論とはどのようなものなのかを考察する。

1.2.1 必然性と蓋然性

推論とはいくつかの前提から一つの結論を導き出すことである。前提や結論を構成するのは基本的には文（あるいは文によって表現される信念や知識）である。私たちは「太郎は日本に住んでいる」という文から「太郎は日本人だ」ということを推論するが、「日本」からは何も推論しない（「日本」と聞いて「日本人」を思い浮かべるのは連想であり、推論ではない）。

ある推論が正しいのは、その前提のすべてが真である時には必ず結論も正しい時である。言い換えると、正しい推論とは、前提が正しいのに結論が誤りであるということがありえない推論である。このような推論を**必然的推論**と呼ぶことにする。たとえば「太郎は日本に住んでいる」から「太郎は日本人だ」への推論が必然的かどうか考えてみよう。い

まは個別の太郎という人物について考えているが、推論の必然性を論じるときは、それがいかなる場合にも成り立つかどうかを考えなければならない。そしてこの推論はもちろん一般的には成り立たない。日本に住んでいる外国人はいくらでもいる。彼らについては日本に住んでいるとは言えるが、日本人であるとは言えない。このようにある推論が必然的でないことを示すためには、その前提がすべて真であるが、結論が偽であるような事例を挙げればよい。そのような事例を反例と呼ぶ。

注意しなければならないのは必然的な推論の前提や結論が必ずしも真とは限らないということである。例えば次の推論は前提も結論も偽であるにも関わらず必然的である。

平家でなければ人ではない。

すべての人は平家である。

必然的ではないが、前提がすべて真であるときには高い確率で結論も真であるような推論を蓋然的推論と呼ぶ。蓋然的な推論を明確に定義する一定の基準はない。というのもある確率を高いと見るか低いと見るかは、それを判断する状況や主体に依存するからである。例えばある打者の打率が3割と言われればそれは高いと感じるだろうが、ある野球チームの勝率が3割ならば高いとは感じない。そこでこのテキストでは必然的でない推論はすべて蓋然的と呼ぶことにする。

A から B への推論が必然的であるということは言い換えると、A が B に対して十分条件になっているということである。またこのとき B は A に対して必要条件になっていると言う。

問題 1.4. 以下の推論が必然的かどうか判定しなさい。必然的でない場合は反例を考えなさい。

- (1) ジョンはポールと同じ年である。
 ポールはデヴィッドと同じ年である。

 ジョンはデヴィッドと同じ年である。
- (2) ジョンはジョーンズ氏の息子である。
 ポールはジョーンズ氏の息子である。

 ジョンとポールは兄弟である。
- (3) すべての学者が賢いとは限らない。

 賢くない学者もいる。
- (4) すべての哺乳類は胎生である。
 カモノハシは哺乳類である。

 カモノハシは胎生である。

- (5) 太郎は次郎の兄である。
次郎は太郎の弟である。
- (6) ジョンはピーターの父である。
メアリーはピーターの娘である。
メアリーはジョンの孫である。
- (7) ジョンはピーターの父である。
メアリーはピーターの母である。
メアリーはジョンの妻である。
- (8) 20 世紀のアメリカ大統領はすべて民主党か共和党のどちらかである。
20 世紀には民主党のアメリカ大統領がいた。

問題 1.5. 条件 (a) と (b) の関係がどのようなになっているかを次の (A)-(D) から選びなさい。

- (A): (a) は (b) の十分条件であるが必要条件ではない。
 (B): (a) は (b) の必要条件であるが十分条件ではない。
 (C): (a) は (b) の必要十分条件。
 (D): (a) は (b) の必要条件でも十分条件でもない。

- (1) (a) 太郎は文学部に属している。
(b) 太郎は理学部に属していない。
- (2) (a) 太郎は山田家の長男だ。
(b) 山田家に太郎より年上の子供はいない。
- (3) 太郎が現代の日本人であるとき、
(a) 太郎は 20 歳以上だ。
(b) 太郎は選挙権を持っている。
- (4) x, y が整数のとき
(a) $x < y + 1$
(b) $x \leq y$
- (5) x, y が有理数のとき
(a) $x < y + 1$
(b) $x \leq y$

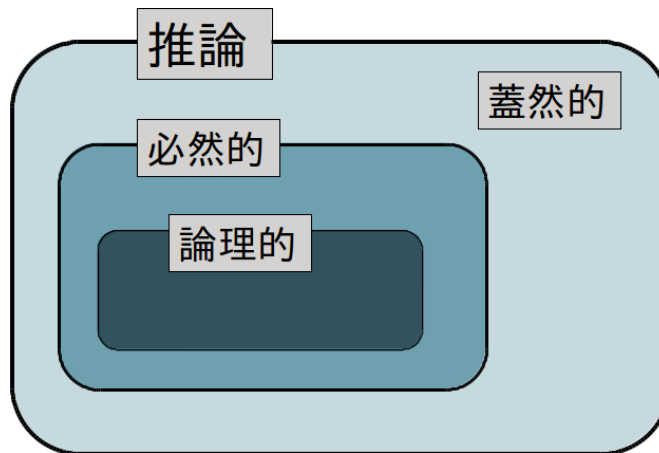


図 1.1 蓋然的、必然的、論理的推論

1.2.2 妥当な推論／演繹

「ジョンはメアリーの親である」から「メアリーはジョンの子である」への推論は必然的である。この必然性は「親」と「子」という言葉の意味によって成り立っている。一方で「学者がみんな賢いわけではない」から「賢くない学者がいる」への推論は「学者」と「賢い」という言葉の意味に依存していない。たとえば「学者」を「カラス」に、「賢い」を「黒い」に置き換えてもこの推論は成り立つ。このようにそこに含まれる言葉の意味によらない必然的推論を妥当な推論、または演繹（deduction）と呼ぶ。いわゆる論理的な推論とは演繹的推論のことである。

推論の妥当性は前提と帰結に含まれる文の論理的な構造のみに依存する。文の論理的な構造とはその文が肯定されているか否定されているか、何らかの条件のもとに主張されているか無条件に主張されているか、二つの文が同時に成り立つことが主張されているかどうかどちらかが成り立つことが主張されているか、あることが特定の対象について成り立つことが主張されているか任意の対象について成り立つことが主張されているか不特定のある対象について成り立つことが主張されているか、といったことである。このような文の論理的な構造に対応して文は、以下のものに分類される。

- **原子命題**：いかなる文も構成部分として含まない文。たとえば「太郎は人間だ」など。
- **否定**：ある文が偽であることを述べる文。例えば「太郎は人間ではない」は「太郎は人間だ」という文の否定である。
- **連言**：二つの文の両方が真であることを述べる文。例えば「太郎は人間であり、かつポチは犬だ」など。日常言語では二つの文の主語や補語、目的語などが同一の場合、それらを接続詞や読点でつなげて単一の文のように書くが、それらも連言の一種である。例えば「太郎は人間であり、男性だ」、「太郎とジョンは哺乳類だ」など。

選言を構成している文を連言肢という。

- **選言**：二つの文のすくなくともどちらか一方が真であることを述べる文。例えば「太郎は人間であるか、または男性である」など。日本語の「または」は「どちらか一方だけ」を意味することが多いが、ここでは両方が成り立っている可能性は排除されないことに注意しよう。選言を構成している文を選言肢という。
- **条件文**：ある前提条件からあることが帰結するということを述べる文。たとえば「太郎が人間ならばジョンは犬だ」など。条件文で前提条件を述べる文を前件、帰結を述べる文を後件という。
- **全称命題**：あることがすべての対象について成り立つことを述べる文。たとえば「すべてのものは人間である」など。
- **存在命題**：あることが何らかの対象について成り立つことを述べる文。たとえば「あるものは人間である」、「人間であるものが存在する」など。

推論の妥当性はすべてこれらの命題の形式に依存するものであり、その内容には関わりがない。例えば二重否定律は「ある命題の否定の否定からもとの命題を推論してよい」という規則である。またド・モルガンの法則 (1) は「二つの命題の連言の否定からそれぞれの命題の否定の選言を推論してよい」と記述することができる。

前節で挙げた推論規則はすべて妥当な推論のパターンである。しかし妥当な推論はそれだけではない。それどころか妥当な推論のパターンは無限に存在する。それでは妥当な推論と妥当でない推論を分ける明確な基準は存在するのだろうか。日常的に使われる推論に関しては、妥当な推論とそうでない推論の区別は必ずしも明確ではない。それは部分的には日常言語の曖昧さなどによるものであり、また部分的には妥当性についての、万人によって受け入れられた基準が存在しないという事実による。

しかしながら日常言語をモデル化した記号論理においては、推論の妥当性を厳密に定義する試みが行われており、そして妥当な推論とそうでない推論を識別するための機械的で効率的な方法も発見されている。次章は記号論理学による妥当性の定義を紹介し、次々章では記号論理学における妥当性の判定方法を紹介する。

問題 1.6. 以下の推論が前節のどの推論規則の適用例であるかを答えよ。

- (1) 万物は流転する。

エッフェル塔は流転する。

- (2) ソクラテスが人間ならばソクラテスは死ぬ。

ソクラテスは人間である。

ソクラテスは死ぬ。

- (3) 太郎が日本人ならば太郎は桜が好きだ。
 太郎は桜が好きではない。
 太郎は日本人ではない。
- (4) 猫は鯉節が好きだ。
 アメリカンショートヘアは猫だ。
 アメリカンショートヘアは鯉節が好きだ。
- (5) $\sqrt{2}$ は有理数であるか無理数であるかのどちらかである。
 $\sqrt{2}$ は有理数ではない。
 $\sqrt{2}$ は無理数である。
- (6) 君が無実ならば君にはアリバイがある。
 君にアリバイがないのであれば君は無実ではない。
- (7) クラムボンのかぶかぶ笑った。
 かぶかぶ笑ったものが存在する。
- (8) メアリーはスティーブが好きでないことはない。
 メアリーはスティーブが好きだ。
- (9) _____
 メアリーはスティーブが好きか好きでないかのどちらかである。
- (10) I don't like either tea or coffee.
 I don't like tea and I don't like coffee either.
- (11) すべての学生が勤勉なわけではない。
 勤勉でない学生もいる。
- (12) 勤勉でない学生はいない。
 すべての学生は勤勉だ。
- (13) 太郎が部活とバイトの両方に行ったということはない。
 太郎は部活かバイトのどちらかには行かなかった。

- (14) _____
 ジョンがアメリカ人でありかつアメリカ人でない、ということはない。

問題 1.7. 以下の前提から結論の 1-3 が論理的に導かれるか否かを答え、その理由をできるだけ詳しく述べなさい。ただし通常の算術において成り立つ事実はすべて前提されるとする。

前提： 任意の自然数 n に対して、 n が 4 で割り切れ、かつ 100 で割り切れない、または n が 400 で割り切れるとき、西暦 n 年は閏年である。

結論

1. 西暦 n 年が閏年ならば n は偶数である。
2. 西暦 n 年が閏年でなく、 n が 4 で割り切れるならば n は 100 で割り切れない。
3. 西暦 n が閏年でないならば西暦 $n + 4$ 年も閏年でない。

問題 1.8. 前提から演繹的に推論できる文を結論からすべて選びなさい。ただしここで考慮されている対象はすべて人間であるとする。

(1)

● 前提：

- (p1) すべての人が臆病であるか賢明ならば戦争は起こらない。
- (p2) 戦争が起こるならば世界は平和ではない。
- (p3) すべての人が幸せならば世界は平和だ。
- (p4) 幸せでない人がいるならば太郎は幸せでない。
- (p5) 勇気がある人は臆病ではない。

● 結論：

- (c1) 世界が平和であるか勇気のある人が存在しなければ戦争は起こらない。
- (c2) 世界が平和でありかつ戦争が起こる、ということはない。
- (c3) 臆病でも賢明でもない人がいると太郎は幸せではない。
- (c4) 戦争が起こるならば愚かな人または臆病でない人がいる。
- (c5) 太郎が幸せならば戦争は起こらない。

(2)

● 前提：

- (p1) マーティンはゴードンだけが知っているある定理を知っている。
- (p2) ゴードンはゴードンの証明した定理のいずれかを知る人すべてに尊敬されている。
- (p3) ゴードンが尊敬しているのは哲学者か数学者だけだ。
- (p4) 自分を尊敬している数学者または詩人はいない。

(p5) 自分で証明した定理を知らない人はいない。

(p6) 誰かに知られている定理はすべて誰かによって証明されている。

● 結論：

(c1) マーティンとゴードンはお互いを尊敬している。

(c2) マーティンが知らないゴードンが証明した定理が存在する。

(c3) マーティンは哲学者である。

(c4) ゴードンを尊敬している人はすくなくとも一つの定理を知っている。

問題 1.9. アルフレッド、バートランド、チャールズ、ディヴィッドが以下のように証言している。正しいことを言っているのは誰か、すべて選べ。

1. アルフレッド「僕らはみんな嘘をついている」
2. バートランド「アルフレッドの言っていることは本当だ」
3. チャールズ「バートランドが嘘をついているならば火星人は存在する」
4. ディヴィッド「チャールズが嘘をついているかいないかのどちらかならば、火星人は存在しかつ火星人は存在しない」

1.3 哲学への寄り道

ユークリッド幾何学においては、真であることが明らかな一定の原理から演繹だけを使って定理が証明されていた。このように、一定の前提から演繹のみを使って作られた体系を演繹的体系という。演繹的体系において、あらかじめ受け入れられた前提を公理という。そのため演繹的体系を公理系と呼ぶこともある。上でみたように演繹的推論においては前提が正しいければ結論も正しいので、自明な公理から出発した演繹的体系は確実な知識を与える。このようにして確実な知識の体系を構築する方法を公理的方法という。

フランスの哲学者であり、大陸合理主義の始祖とされるルネ・デカルト(René Descartes、1596-1690)はこの公理的方法を哲学にも応用して、そのことによって確実な知識を手に入れようとした。彼はまず少しでも疑わしいものは誤りとして棄却することによって、知識の基盤となる確実な真理を見つけ出そうとした。彼はまず幻覚や夢の可能性があるので、感覚によって得られたすべての知識を疑い、そして棄却した。それから彼は数学的な知識も疑わしいものとして棄却した。数学的知識は自明に正しいように思われるが、しかし神が私たちを欺いて偽なる命題を信じさせている可能性がある、とデカルトは論じる。およそありとあらゆることを疑った末に、彼がたどり着いたのは、そのような懷疑を抱いている自分自身の存在を疑うことはできない、という真理だった。すなわち「われ思うゆえにわれあり」である。彼はこの疑いようなない確固たる心理を出発点として、ここから演繹的な推論によって様々な結論を導き出し、彼の哲学体系を構築した。

演繹的推論そのものの研究は古代ギリシャの哲学者アリストテレス(紀元前 384-)に始まる。アリストテレスは三段論法と呼ばれる様々な妥当な推論のパターンを特定し体系立

てた。^{*1}。アリストテレスの論理学は古代から中世にわたって広く支持され、論理学を学ぶということはまず、アリストテレスの論理学、特に三段論法のパターンを覚えることであった。中世ヨーロッパの大学においては自由技芸（リベラル・アーツ）に七つの科目があったが、文法、論理学、修辞学の3科は、他の4科（算術、幾何学、天文学、音楽）よりも程度の低いものとみなされた。これら3科目はトリヴィア（trivia、もともとは「三叉路」を意味する）とも呼ばれたのだが、ここから現在の「つまらないもの」あるいは「自明なこと」という意味が派生したと推測される。

アリストテレスの論理学は名辞論理学と呼ばれ、主に二つの名辞を含む命題（「すべての人間は死すべきものである」、「ある人間は死なないものである」などの形式）を扱うものであった。従ってそれは限定された形式の命題しか扱えず、十分な普遍性を持つものではなかった。この欠点を克服したのがドイツの数学者・哲学者ゴットロープ・フレーゲ（Gottlob Frege, 1848-1925）の量化理論である。フレーゲの論理体系は非常に強力で、算術や解析において使われていたあらゆる推論がそこで表現できるのみならず、算術において使われる現れる概念、そしてあらゆる算術の定理がフレーゲの論理体系に還元できるほどであった。しかしながら不幸なことにフレーゲの体系は強力すぎたのである。その表現力の強さは矛盾を導くような概念を定義することを可能にしていた。それを発見したのがイギリスの数学者・哲学者バートランド・ラッセル（Bertrand Russell, 1872-1970）だった。

ラッセルのパラドクスには述語に関するものと集合に関するものの二種類があるのだが、集合に関するものは次のようなものだった。集合とは一定の条件を満たす対象の集まりである。ところで集合には自分自身を要素として含むものと含まないものがある。例えば馬の集合はそれ自身を含まない（集合は馬ではないから）。しかし例えばすべての集合の集合はそれ自身を含んでいる。さて、自分自身を含まない集合をすべて集めたものも集合である。この集合を R によって表そう。すると R が R に含まれると仮定しても、含まれないと仮定してもその逆の結論が導かれてしまう。というのも R が R に含まれるとすると、 R の定義から R は自分自身を含まないことになる。一方で R が R に含まれないとすると、 R の要素であるための条件を満たしているので、 R に含まれることになる。

フレーゲはラッセルからこのパラドクスを知らされると大きなショックをうけて論理主義のプログラムからは手を引いてしまった。しかしラッセルはパラドクスの発見以後も、パラドクスを避けながら数学的推論のすべてを表現するのに十分な普遍性を持った論理を探求し、あたらしい論理体系を構築した。中世においては算術や幾何学よりも「つまらない」ものとみなされた論理学が、数学の全体をその中に包含することができるほど豊かな学問に発展したのである。

^{*1} 三段論法についてより詳しくは 39 ページを参照。

第2章

記号論理

1章では、論理的に正しい推論の様々なパターンを見た。しかしながら論理的に正しい推論のパターンは他にも様々なものがある。それどころか論理的に正しい推論のパターンは無限に存在しているのである^{*1}。それでは無限にある論理的に正しい推論と、やはり無限にある論理的に正しくない推論を見分ける一般的な方法はあるのだろうか。

例えば算術の等式を考えよう。私たちは任意の算術の等式について、それが正しいのかどうかを判断することができる。例えば $2 + 3 = 10/2$ は正しいが $0 \times 5 > 3^0$ は正しくない。これは私たちが任意の算術の等式についてそれが正しいかどうかを判定する手続きを知っているからである。実は論理的推論についてもそのような手続きが存在することが知られている。本章と次章ではそのような方法を紹介する。まず本章で、推論を記号によって表現する方法を学ぶ。次章では記号で表された推論の妥当性をチェックする方法を紹介する。

2.1 推論を記号で表現する

推論の妥当性を判定するためには、まず推論を厳密に、曖昧でない仕方で表現することが必要である。私たちの日常言語はこの目的のためには適さない。なぜならば日常言語には様々な冗長性や曖昧性、多義性が存在しているからである。例えば「会議は遅くまで続き、しかし結論は出なかった」と「会議は遅くまで続き、そして結論は出なかった」はどう違うのだろうか？ これらには微妙なニュアンスの違いがあるが、両者とも表現している事実、会議が遅くまで続いたということと、および結論が出なかったということである。私たちがこれらの文を含む推論の妥当性を問題にする限り、このニュアンスの違いは不要である。また例えば「太郎はいつも正直じゃない」といったとき、太郎が正直じゃないことが常だと主張されているのか、それとも太郎が常に正直だということが否定されているのかが明瞭ではない。

そこで以下ではこのようなニュアンスや曖昧さを排除した人工的な言語を用いることに

^{*1} 例えば二重否定律に類比的な四重否定律、六重否定律、八重否定律、などなどが妥当であることは直ちに明らかである。

する。この言語は日常言語（たとえば日本語）のすべてを翻訳できるようなものであることを意図していないことに注意しよう。第一に、この言語は真偽が問える文しか翻訳しない。従って疑問文や命令文はこの言語では表現できない。第二に、真偽が問える文を含んでる推論でも、この言語によっては扱うことができない推論も存在する。そういった推論については本章の最後で触れる。第三に、この人工言語で表された推論が、記号論理学の方法によって妥当だと判定されたとしても、それに対応する日本語の推論が常に妥当と言えるとは限らない。前章で見たとおり、論理的に妥当な推論として受け入れられているものでも、日常言語では妥当に思われないものが存在するからである。

論理学は日常言語の単純化されたモデルであり、モデルというのは、それが対象としている事物・現象が持つ様々な側面のうち、当面の目的にとって重要な側面を抽象するものである。例えば物理学では、ある物体の運動を記述するモデルにおいて、しばしば摩擦などの影響を無視することがある。また経済学では商品の価格のみに注目し、その商品の内実がどのようなものであるかを無視することがある。この様に適切な抽象化を行っているからこそモデルは有用なのであり、現実のすべての要素を反映したモデルなどは（かりにそのようなものが可能だとしても）ほとんど有用性はないだろう。

もちろんあるモデルにおいて無視されている要素を組み込んだ別のモデルを考えることもしばしば重要である。論理学においてもここでは考慮されていない側面を組み込んだ様々な体系がある。しかしこのテキストではそこまでは踏み込まず、もっとも標準的な論理学の体系を紹介するに止める。

ここで導入される人工言語は、推論の形式的な正しさを判定するためのものである。例えば

すべての人間は死ぬ。

ソクラテスは人間だ。

ソクラテスは死ぬ。

という推論の妥当性は「人間」、「死ぬ」、「ソクラテス」などの語の意味に依存しない。妥当な推論とは、こういった個々の語の意味に依存するようなものではない。従って私たちはこのような日常言語の表現を使う必要はない。むしろそういった言葉を使わない方が効率的であろう。

そこで私たちは「ソクラテス」のような個体を表わす名前の代わりに $a, b, c, \dots$ などの文字を使う。これらを定項と呼ぶ。また「…は人間である」、「…は死ぬ」などの述語の代わりに $F, G, H, \dots$ などの文字を使う。これらを述語と呼ぶ。各々の述語には項数と呼ばれる正整数が割り当てられているものとする。上の例で現れるのは1項述語である。例えば2項述語には「…は…の親である」、「…は…より大きい」などがある。3項述語には例えば「…は…と…の間にある」、「…は…を…に与える」などがある。「ソクラテスは人間である」のような文は述語の後ろに定項を並べて $F(a), G(b), H(c), \dots$ などと表記する。「ソクラテスはプラトンの師である」のように二つ以上の定項を含む文を用いる場合には、述語の後ろに複数の定項を並べて $F(a, b), G(c, d, e), \dots$ などと表記することにする。こ

の場合、 F は 2 項述語、 G は 3 項述語である。

推論の妥当性について論じるときに、そこに現れる語の意味は重要ではないと書いたが、実際には私たちに関心を持つ語がいくつかある。1 章において、私たちは文をその形式に従っていくつかの種類に分類した。そのような文の種類を表す語がある。たとえば上の推論では「すべての」という語がそうである。これはその文が全称命題であることを表している。他にも私たちに関心を持つ語として、「…ではない」、「…かつ…」、「…または…」、「…ならば…」、「…が存在する」といった語がある。これらは推論の妥当性にとって重要な意味を持っている。これらの語彙を論理定項と呼ぶ。

「…ではない」のように、いくつかの文（大抵は一つか二つ）と結び付いて、より複合的な文を作る表現を、論理学では結合子と呼ぶ。論理学において結合子は記号によって表わされる。標準的には以下の記号がつかわれる。

- A でない : $\neg A$
- A かつ B : $A \wedge B$
- A または B : $A \vee B$
- A ならば B : $A \rightarrow B$

「すべての…」と「…が存在する」は結合子とは違った使われ方をする。これらは不特定の対象を指す変項と呼ばれる表現を伴って「すべての x について…」、「…であるような x が存在する」という仕方で使われる。記号では

- すべての x について A : $\forall x A$
- A であるような x が存在する : $\exists x A$

と表現される。

上に上げた推論に現れる「すべての人間は死ぬ」という文はこれらの道具立てを使ってどう表現できるのだろうか。この文は見かけ上は「すべての人間」という主語と「…は死ぬ」という述語が結合して出来ているように思われる。しかし「すべての人間」というものが何を指しているかは必ずしも明らかではない（明らかなのはそれが定項でさせるようなものではないということである）。そこで私たちはこの文を、「いかなる対象についても、それが人間であるならばそれは死ぬ」を表現しているものとして扱う。この文は代名詞の代わりに不特定の対象を表わす変数 x を使って「いかなる対象 x についても x が人間ならば x は死ぬ」と表現できる。これは記号を使うと

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

と表現することができる。

もう一つ例を挙げよう。「空を飛ぶ哺乳類が存在する」という文はどのように記号で表現できるだろうか。この文は「ある対象 x が存在して、 x は空を飛び、かつ x 哺乳類である」とパラフレーズ出来る。従って記号では

$$\exists x(F(x) \wedge G(x))$$

と表現することができる。

この様に個々の文が形式言語の式で表現できれば、推論もこれらの式を使って表現することができる。例えば上の推論は

$$\frac{\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \quad F(a)}{G(a)}$$

のように表現することができる。

以下ではまず形式言語の表現を定義し、それから日本語で表現された推論を、形式言語で表現する練習をする。それからそれらの形式言語の表現を解釈する方法を説明する。

2.1.1 構文論

以下において私たちは主に記号化された形式言語を扱う。形式言語を定義するための規則を構文論という。以下では一階述語論理^{*2}の構文論を紹介する。

論理学の言語には単純な記号からなる基本的な語彙と、複合的な表現を形成するための組み合わせの規則がある。ここでは複合的な表現は論理式と呼ばれる。以下でそれらの定義をする。

定義 2.1 (語彙). 私たちの言語の基本的な語彙は変項、定項、 n 項述語 (ただし n は任意の正整数)、前節で導入した論理定項 (結合子と量化子)、および左括弧 “(” と右括弧 “)” から構成される。変項は x, y, z などによって表わされる。定項は a, b, c などによって表わされる。述語は F, G, H などによって表わされる。また変項と定項を合わせて項と呼び、一般に項は t, s, u などによって表わされる。

定義 2.2 (論理式). 論理式は以下のように再帰的に定義される。

1. 任意の n 項述語 F と任意の項 $t_1, \dots, t_n$ に対して $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ は論理式である。このような論理式を原子式と呼ぶ。
2. A, B が論理式であり、 x が変項であるとき、 $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), \forall x A, \exists x A$ は論理式である。これらはそれぞれ否定、連言、選言、条件式、全称式、特称式と呼ばれる。またこれらをまとめて複合式と呼ぶこともある。
3. 上記の二つの規則によって論理式であると定まるものだけが論理式である。

以上によって定義された形式言語を一階述語論理の言語 $\mathcal{L}$ と呼ぶ。

この定義によって $(\neg F(a) \wedge G(y)), (F(y) \rightarrow (G(x, y) \vee \neg H(a)))$ などは論理式であると分かる。一方で $F, F(x) \neg, (G(a) \wedge), (H(a) \rightarrow F(a, z)), \forall a F(a)$ などは論理式ではない。

以下では一般に論理式を A, B, C などによって表わす。

^{*2} 論理学には、対象とする言語の違いによって命題論理、一階述語論理、二階述語論理、高階述語論理、様相論理などの区別がある。ここでは一階述語論理のみを扱う。

括弧は論理式の構造を曖昧さのない形で提示するために付けられるものである。例えば $A \wedge B \vee C$ と書いてしまうと $(A \wedge (B \vee C))$ と $((A \wedge B) \vee C)$ のどちらなのかが分からなくなってしまう。しかし一番外側の括弧は書かなくても誤解されることはないので、以下では論理式の一番外側の括弧は通常省略して書くことにする。また算数において $x + y \times z$ と書いた時には $x + (y \times z)$ と読むように、私たちは $\wedge, \vee, \rightarrow$ の順番で優先的に結合するものとする。従って例えば $A \rightarrow B \wedge C \vee A$ は $(A \rightarrow ((B \wedge C) \vee A))$ の省略である。また同じ結合子同士では右側にあるものが優先的に結合される。従って例えば $A \rightarrow B \rightarrow C$ は $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$ の略である。

問題 2.1. 以下の論理式において省略されている括弧を復元しなさい。

1. $\neg A \rightarrow B \wedge C \rightarrow B$
2. $\neg B \vee C \vee A \rightarrow \neg B \wedge C \vee A$
3. $A \wedge B \rightarrow C \vee \neg B \rightarrow A \vee C \wedge B \wedge \exists x C$

問題 2.2. 以下の論理式の括弧を可能な限り省略しなさい。

1. $((((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))))$
2. $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A))$
3. $((((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A))$
4. $(\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B))$
5. $((A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)))$
6. $((A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$

1 章で見た推論規則は、この形式言語を使って表現することができる。例えば以下のよう。

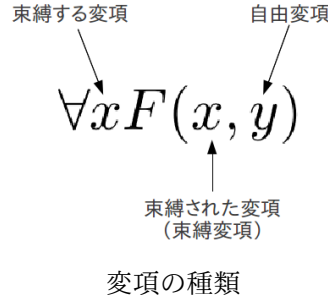
- 二重否定律： $\neg\neg A$ から A を推論してよい。
- 前件肯定： $A \rightarrow B$ と A から B を推論してよい。
- 後件否定： $A \rightarrow B$ と $\neg B$ から $\neg A$ を推論してよい。
- 背理法： A を仮定して B と $\neg B$ の両方が導かれるならば、 $\neg A$ を推論してよい。

量子子に関する規則に関しては、若干難しい点がある。例えば全称特例化について考えよう。この規則が述べていることを形式言語に置き換えて表現すれば、

- $\forall x F(x)$ から $F(a)$ を推論してよい。(ただし a は任意の定項)

のようになると思われる。しかし量化の対象になるのは $F(x)$ のような原子式の形をした論理式ばかりではない。従って私たちはより正確には次のように言わなければならない。

- $\forall x A$ から A' を推論してよい。(ただし A' は A に現れる x を任意の定項 a に置き換えて得られる論理式)



しかしこの表現もまだ完全に正確ではない。例えば「だれが約束を破っても、みんなに迷惑がかかる」というような言明を考えてみよう。この言明に全称特例化を適用すると、例えば「太郎が約束を破るとみんなに迷惑がかかる」、「ジョンが約束を破るとみんなに迷惑がかかる」、などなどの結論が得られる。もとの言明は論理式では $\forall x(F(x) \rightarrow \forall xG(x))$ のように表現できる。しかし $F(x) \rightarrow \forall xG(x)$ に現れる x を a に変えてしまうと $F(a) \rightarrow \forall aG(a)$ となってしまう、これはもはや論理式ではない。というのも量子子の直後には変項以外のものが来てはいけなからである。そこで量子子の直後の変項は置き換えの対象としない、という取り決めをしなければいけない。しかしながらこれでもまだ十分ではない。というのも量子子の直後の変項を除いて置き換えを行うと $F(a) \rightarrow \forall xG(a)$ となる。 $\forall xG(a)$ という論理式においては $\forall x$ が影響を及ぼす変項 x がその後の式に出てこないで、この量化は無意味である。実質的にこの論理式は $G(a)$ と同じことを表現することになる。したがって $F(a) \rightarrow \forall xG(a)$ が表現するのは「太郎が約束を破ると太郎に迷惑がかかる」ということである。これはもとの文「だれが約束を破っても、みんなに迷惑がかかる」から全称特例化によって推論されることではない。このように、置き換えを行うときには、 $\forall x$ や $\exists x$ の後ろの論理式の中に現れる x も対象外としなければならないのである。

以下で置き換えの操作を厳密に定義しよう。

定義 2.3 (スコープ、束縛変項、自由変項、閉論理式). 論理式 $\forall xA$ または $\exists xA$ における A の部分を $\forall x$ または $\exists x$ のスコープと呼ぶ。 $\forall xA$ または $\exists xA$ の A の中に現れる、量子子の直後以外の x は束縛された変項あるいは束縛変項と呼ばれる。一方で量子子の直後に現れる変項は束縛する変項と呼ばれる。束縛する変項でも束縛された変項でもない変項は自由変項と呼ばれる。 A が自由変項を含まない時、 A は閉論理式あるいは閉じた論理式と呼ばれる。

例えば $F(x, y) \wedge G(a, z)$ の自由変項は x, y, z である。また $\exists z(\forall yF(x, y) \wedge \forall wG(a, z))$ の自由変項は x である。同じ変項が一つの論理式の中で束縛変項としても自由変項としても現れうることに注意しよう。例えば $\forall xF(x) \wedge G(x)$ における x は、 $F(x)$ の中では束縛されているが、 $G(x)$ の中では自由である。

定義 2.4 (代入). 論理式 A の x に対する項 t の代入とは A に現れる自由な変項 x のすべてを項 t (これは定項であることも変項であることもある) で置き換えてできた論理式のこ

とであり、これを $A[x/t]$ によって表す。

例えば $\exists x(\forall yF(x,y) \wedge \forall zG(y,z))[x/a]$ は $\exists x(\forall yF(x,y) \wedge \forall zG(y,z))$ である。というのもこの論理式の中で x が自由変項として現れている箇所はないからである。また $\exists x(\forall yF(x,y) \wedge \forall zG(y,z))[y/a]$ は $\exists x(\forall yF(x,y) \wedge \forall zG(a,z))$ である。 $F(x,y)$ の中の y は束縛されていることに注意しよう。

このように代入を定義すると、量子子に関する規則が次のように表現できる。

- 全称特例化： $\forall xA$ から $A[x/a]$ を推論してよい。(ただし a は任意の定項)
- 特称一般化： $A[x/a]$ から $\exists xA$ を推論してよい。(ただし a は任意の定項)

問題 2.3. 1.1 節の推論規則のうち、選言三段論法、ド・モルガンの法則 1 および 2、対偶律、排中律、矛盾律、ジレンマ、一般化されたド・モルガンの法則 1 および 2、肯定三段論法、否定三段論法を形式言語を使って表現しなさい。

2.1.2 形式言語による日常言語の分析

この言語は非常に単純に思われるだろうが、しかし実際にはかなり豊かな表現力を持っている。例えば 1 項述語 $Male(x), Female(x)$ をそれぞれ「 x は男性である」、「 x は女性である」を表すものとし、2 項述語 $Eq(x,y), Parent(x,y), Couple(x,y), Elder(x,y)$ をそれぞれ「 x と y は同一である」、「 x は y の親である」、「 x と y は結婚している」、「 x は y より年上である（先に生まれている）」を表すものであるとすると、これだけの語彙からおおよそ様々な家族・親戚関係を表現することができる。定項 a, b, c によってそれぞれジョン、ポール、メアリーを表すことにすると、日常言語の言明が例えば以下のように形式言語 $\mathcal{L}$ に翻訳できる。

日常言語の表現	$\Rightarrow$	$\mathcal{L}$ の表現
ジョンはポールの父親である。	$\Rightarrow$	$Parent(a,b) \wedge Male(a)$
メアリーはジョンの孫である。	$\Rightarrow$	$\exists x(Parent(a,x) \wedge Parent(x,c))$
メアリーは独身である。	$\Rightarrow$	$\neg \exists x Couple(c,x)$
メアリーはジョンの姉である。	$\Rightarrow$	$\exists x(Parent(x,a) \wedge Parent(x,c) \wedge Female(c) \wedge Elder(c,a))$

1 項述語 $Nat(x)$ を「 x は自然数である」を表すものとし、2 項述語 $Leq(x,y)$ を「 x は y 以下である」を表すものとし、3 項述語 $Sum(x,y,z), Prod(x,y,z)$ はそれぞれ「 x は y と z の和である」、「 x は y と z の積である」を表すものとする。このとき自然数に関する様々な言明が以下のように形式言語 $\mathcal{L}$ に翻訳できる。なお以下で a_n は自然数 n を表す定項であるとする*3。

*3 このテキストでは 0 も自然数として扱う。

日常言語の表現	$\Rightarrow$	$\mathcal{L}$ の表現
4 は偶数である。	$\Rightarrow$	$\exists x Prod(a_4, a_2, x)$
3 は 9 と 12 の公約数である。	$\Rightarrow$	$\exists x Prod(a_9, a_3, x)$ $\wedge \exists x Prod(a_{12}, a_3, x)$
7 は素数である。	$\Rightarrow$	$\forall x (Nat(x) \wedge \exists y (Nat(y) \wedge Prod(a_7, x, y)$ $\rightarrow (Eq(x, a_1) \vee Eq(x, a_7)))$
0 は最小の自然数である。	$\Rightarrow$	$Nat(a_0) \wedge \forall x (Nat(x) \rightarrow Leq(a_0, x))$
1 を加えて 0 になる自然数は存在しない。	$\Rightarrow$	$\neg \exists x (Nat(x) \wedge Sum(a_0, x, a_1))$

量化を入れ子にすることでより複雑な文を表現することもできる。たとえば「最大の自然数は存在しない」という文は $\neg \exists x (Nat(x) \wedge \forall y (Nat(y) \rightarrow Leq(y, x)))$ によって表現できる。さらに重要なのはある対象の存在の唯一性が表現できるということである。ある条件を満たす対象が一つしか存在しないということは、「その条件を満たす対象 x が存在し、かつ任意の対象 y について、 y がその条件を満たすのであれば、 x と y は同一の対象である」、と述べることで表現できる。例えば「ジョンには一人だけ子供がいる」という文は $\exists x (Parent(a, x) \wedge \forall y (Parent(a, y) \rightarrow Eq(x, y)))$ (「ある x が存在し、ジョンはその親であり、かつ任意の y についてジョンが y の親ならば x と y は同一である」) と表現することができる。

量化の重要性を示す例としてしばしば言及されるのが、

- (1) Everybody loves somebody
- (2) Somebody is loved by everybody

という 2 つの文の違いである。文法的には (2) は (1) の受動態表現になっており、従って同じ事実を表現していると思われる。しかしながら実際にはそうではない。(1) はすべての人にとってそれぞれの愛する人がいる、ということであり、愛されている側の人は同じ人とは限らない。一方で (2) はすべての人から愛されている一人の人間がいるということである。 $Love(x, y)$ によって「 x は y を愛する」という 2 項述語を表すとすれば、これら二つの表現は形式言語ではそれぞれ

- (1') $\forall x \exists y Love(x, y)$
- (2') $\exists y \forall x Love(x, y)$

と表現することができる。次節で見るようにこれらの論理式はまったく異なる意味を持っている。

問題 2.4. 上の例にならって、以下の日常言語の表現を形式言語 $\mathcal{L}$ の表現に直しなさい。

1. ジョンはメアリーのいとこである。
2. メアリーはシングルマザーである。

3. ポールは長男である。
4. 7 と 9 は互いに素である。
5. 6 は 12 と 30 の最大公約数である。
6. どんな自然数にもそれより大きい自然数が存在する。
7. 自然数に 1 を加えたものは自然数である。
8. 任意の二つの自然数に対して、その最大公約数が一つだけ存在する。
9. 2 より大きい任意の偶数は二つの素数の和になっている。
10. 任意の二つの正実数に対して、ある自然数が存在して、一方の正実数は他方の正実数とその自然数の積より小さい。(x は正実数である」を *PosReal* によって表すこと)
11. 任意の自然数 x, y に対して、 y が 0 でなければ、 x を y で割った商と余りは一意に定まる。
12. 任意の自然数に対して、その次の自然数が一意に存在する。(「次の数」 が何を意味するかには複数の解釈が可能である。一つは、ある自然数の次の自然数とは、それに 1 を足したものだ、という解釈である。もう一つは、ある自然数の次の自然数とはそれより大きく、かつそれより大きい自然数の中で最小の自然数だ、という解釈である。この両方の解釈で翻訳をしてみよう。)

2.2 形式言語の意味

前節で定義した論理式にはまだ意味が与えられていない。そこでこの節では論理式に意味を与える方法を説明する。一般に言語に意味を与えるための体系的な方法論を意味論と言う。意味論には様々な種類があるが、ここでは最も一般的な集合論に基づく意味論を扱う。この節の内容は若干テクニカルになるので、記号論理にそれほど興味のない読者は以下を飛ばして次章に進んで構わない。またこの節では集合論の初歩についての知識が前提されるので、必要な読者は 99 ページからの「付録：集合論の基礎知識」を参照していただきたい。

私たちがここで意味を与えようと考えている表現は項、述語、論理式の三種類である。これらについて直観的に説明をしておこう。まず項は何らかの対象を表すものと考えられる。それは太郎やジョンなどの人間かもしれないし、地球や太陽などの天体かもしれないし、0 や 1 などの数かもしれない。論理学は私たちがどのような対象について考える場合にも当てはまるような高度に一般的な推論を扱うために、対象がどのようなものであるかについてはまったくオープンである。述語は「…は人間である」などの属性や「…は…より大きい」などの関係を表す。原子式は項と述語が組み合わされてできた文、例えば「太郎は人間である」や「2 は 1 より大きい」などが表現している状況を表す。複合式は原子式が「…でない」、「…かつ…」などによって複合された文が表現している状況を表す。

この直観的な説明は一見すると分かりやすく思われるが、しかし少し考えてみるとすぐ

にこの説明には不十分な点があることが明かになる。特に文が表す状況とは何なのかが説明されていない。それは何らかの事実をさすのか。しかし事実としては太陽は地球より大きい、「地球は太陽より大きい」という文も歴とした文であるから何らかの状況を意味しているはずである。正しい文と誤った文が指す状況とでは何か本質的な違いがあるのか。文の意味はその文を読んで（聞いて）私たちが思い浮かべるもの、と説明することを好む人々もいる。しかし例えば「0 は 1 より大きい」という文によって私たちは何を思い浮かべているのだろうか。このように文の意味が何かということは非常に難しい問題であり、それについて考えていくとややこしい哲学的議論に巻き込まれることになる。そのような哲学的議論も悪いものではないが、しかしここではそこには立ち入らないことにしよう。

私たちはここで思い切った単純化を行う。それは、文の内容を無視して、文の真偽がその意味であるとみなすということである。そうすると正しい文はすべて真という同じ意味を持ち、逆に誤った文はすべて偽という同じ意味を持つ、ということになる。ここで真と偽が何であるかは問わない。それは何でも良い。1 と 0 でも良いし、「真」と「偽」という文字でもよい。とにかく区別のつく二つのものがあればその一方を真とし、他方を偽とすることができる。

では具体的に意味論を定義していこう。その前に便宜上、真と偽の値のそれぞれを $\top$ と $\perp$ によって表し、これらを真理値と呼ぶ。

定義 2.5 (関係). U を任意の集合とする。 U 上の n 項関係とは、 U の要素 n 個の（重複を許す）列のそれぞれに対して $\top$ か $\perp$ かのどちらか一つの真理値を与える方法であるとする（集合論の用語を使えば n 項関係とは U^n から $\{\top, \perp\}$ への関数である）。 U 上の n 項関係 R が $a_1, \dots, a_n$ に $\top$ を割り当てるとき

$$R(a_1, \dots, a_n) = \top$$

と書き、 $R(a_1, \dots, a_n)$ が真であるという。 R が $a_1, \dots, a_n$ に $\perp$ を割り当てるとき

$$R(a_1, \dots, a_n) = \perp$$

と書き、 $R(a_1, \dots, a_n)$ が偽であるという。

関係は述語の解釈に必要なものである。たとえば「 $\cdots$ は $\cdots$ より大きい」という 2 項述語は、一方が他方より大きいような対象の名前によって補われたときに真なる文を生み出す。たとえばこの述語の最初の空所に「ゴリアテ」、2 番目の空所に「ダヴィデ」を入れたときには真なる文「ゴリアテはダヴィデより大きい」を生み出す。一方でこれらの名前を順番を入れ替えて補うと偽なる文「ダヴィデはゴリアテより大きい」が得られる。従って、「 $\cdots$ は $\cdots$ より大きい」という述語は、 a が b より大きいような対象の列 a, b に $\top$ を割り当て、それ以外の列には $\perp$ を与えるような関係によって解釈するのが自然だろう。日常言語で「関係」というと通常は二つ以上のものの間に成り立つものであるが、ここでは一つの対象に関して成り立つ関係というものも考える。これは通常は「性質」や「属性」と呼ばれるものに対応する。たとえば「 $\cdots$ は人間である」、「 $\cdots$ は赤い」なども関係の一種である。

ただし私たちがここで扱う形式言語 $\mathcal{L}$ においては、「…は…より大きい」のように、私たちがあらかじめその意味を理解しているような述語は一切現れない。従って私たちは一つの述語に対する解釈を一つに固定することはできない。同じことは定項についても言える。形式言語の定項 $a, b, c, \dots$ は「ダヴィデ」や「ゴリアテ」などとは異なり、それがどのような対象を指すのかということに関してまったくオープンである。そこで私たちは定項や述語に対する様々な解釈を考慮する。

集合論に馴染みのある読者にとっては、関係について以下のような説明が分かりやすいだろう。例えば自然数の間の約数関係というものを考えてみよう。 n が m の約数であるというのは m が n で割り切れるということである。このとき、一方が他方を割り切るような自然数の対の全体は一つの集合をなす。その集合を D によって表す。二つの自然数からなる対を (n, m) のように表すと、 D には例えば $(2, 4), (3, 9), (5, 5)$ などが属するが、 $(4, 2), (3, 8)$ などは属さない。一般に

$$n \text{ が } m \text{ の約数である} \iff (n, m) \in D$$

が成り立つ。この意味で約数関係は集合 D と同一視できる。同様に n を m で割った余りが k であるという関係は、この関係を満たす 3 つの自然数からなる列の集合と同一視できる。この集合を M によって表すと

$$n \text{ を } m \text{ でわった余りが } k \text{ に等しい} \iff (n, m, k) \in M$$

が成り立つ。一項関係（属性）に関しては、もちろんその属性を持つ対象の集合と同一視ができる。

関係についてのどちらの見方がより分かりやすいかは状況による。例えば上の「…を…で割った余りが…」という関係は、それを満たす対象の列は無限にあり、かつその列を具体的に示されても、どういう関係であるかが分かりにくい。一方で私たちはこのような特定の意味を持たない関係を指定したい場合もある。例えば自然数のうち、1923 と 191、8371 と 12918、38418 と 9687、1293 と 6563 の間にのみ成立する関係を考えるときは、単にこれらの対を列挙して $\{(1923, 191), (8371, 12918), (38418, 9687), (1293, 6563)\}$ とした方が簡潔である。以下において私たちはこれらの説明を適宜使い分ける。

ここで解釈を正確に定義しよう。

定義 2.6 (解釈). 空でない集合 U が与えられているとする。 v は $\mathcal{L}$ の任意の定項に対して U の一つの要素を割り当て、 $\mathcal{L}$ の任意の n 項述語に対して、 U 上の一つの n 項関係を割り当てる方法とする。このとき U と v の組 (U, v) を（形式言語 $\mathcal{L}$ の）**解釈**と呼ぶ。任意の定項 a に対して v によって a に割り当てられる U の要素を $v(a)$ によって表す。同様に任意の n 項述語 F に対して、 v によって F に割り当てられる U 上の n 項関係を $v(F)$ によって表す。

次に解釈における論理式の真偽を定義するが、しかし解釈がきまってもまだ任意の論理式の真偽を決定することはできない。というものの、論理式には変項が含まれている場合が

あるからである。そのために変項に対してどのような値を割り当てても決定されていなければ任意の論理式の真偽を決定することはできない。

定義 2.7 (環境). (U, v) は $\mathcal{L}$ の解釈であるとする。 (U, v) における一つの環境とは $\mathcal{L}$ の任意の変項に対して U の一つの要素を割り当てる方法である。定項への割り当てと同様、 ρ によって x に u を割り当てられる対象を $\rho(x)$ によって表す。 ρ が (U, v) の環境であるとき、 $\rho_{(x \mapsto u)}$ は x に対して u を割り当てるという点以外には ρ と同じ環境を表す。すなわち

$$\rho_{(x \mapsto u)}(y) = \begin{cases} u & y \text{ が } x \text{ と等しい変項のとき、} \\ \rho(y) & \text{それ以外のとき。} \end{cases}$$

定項への割り当て v を、環境 ρ によって、任意の項 t への割り当てに拡張したものを v_ρ によって表す。すなわち

$$v_\rho(t) = \begin{cases} v(t) & t \text{ が定項のとき、} \\ \rho(t) & t \text{ が変項のとき。} \end{cases}$$

定義 2.8 (解釈における論理式の真偽). (U, v) は $\mathcal{L}$ の一つの解釈、 ρ は (U, v) の一つの環境であるとする。解釈 (U, v) と環境 ρ のもとでの論理式の真偽を以下のように再帰的に定義する。

1. 原子式 $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ が (U, v) と ρ のもとで真であるのは

$$v(F)(v_\rho(t_1), v_\rho(t_2), \dots, v_\rho(t_n)) = \top$$

のときであり、それ以外の時は偽である。

2. $\neg A$ が (U, v) と ρ のもとで真であるのは A が (U, v) と ρ のもとで偽であるときであり、それ以外のときは偽である。
3. $A \wedge B$ が (U, v) と ρ のもとで真であるのは A と B がともに (U, v) と ρ のもとで真であるときであり、それ以外のときは偽である。
4. $A \vee B$ が (U, v) と ρ のもとで真であるのは A か B の少なくとも一方が (U, v) と ρ のもとで真であるときであり、それ以外のときは偽である。
5. $A \rightarrow B$ が (U, v) と ρ のもとで真であるのは (U, v) と ρ のもとで A が偽であるか B が真であるときであり、それ以外のときは偽である。
6. $\forall x A$ が (U, v) と ρ のもとで真であるのは、任意の $u \in U$ に対して A が (U, v) と $\rho_{(x \mapsto u)}$ のもとで真であるときであり、それ以外のときは偽である。
7. $\exists x A$ が (U, v) と ρ のもとで真であるのは、ある $u \in U$ が存在して A が (U, v) と $\rho_{(x \mapsto u)}$ のもとで真であるときであり、それ以外のときは偽である。

論理式 A が解釈 (U, v) と環境 ρ のもとで真であるとき、

$$(U, v) \models_\rho A$$

と書き、偽であるとき

$$(U, v) \not\models_\rho A$$

と書く。

次の事実に注意しよう。

事実 2.9. A が閉じた論理式の時、任意の解釈 (U, v) と、 (U, v) における任意の二つの環境 ρ, ρ' に対して

$$(U, v) \models_{\rho} A \iff (U, v) \models_{\rho'} A$$

従ってある解釈において、環境が論理式の真偽に影響を与えるのはその論理式が閉じていない（自由変項を含んでいる）ときだけである。そのため閉じた論理式の場合は解釈だけを特定して環境に言及せずに真偽を論じることができる。そこで、そのような場合には環境を明示せずに論理式の真偽を

$$(U, v) \models A \text{ または } (U, v) \not\models A$$

によって表す。

例を挙げよう。 $U = \{0, 1\}$ (U は 0 と 1 からなる集合) とし、 $v(a) = 0, v(b) = 1$ とする。また $v(F)$ は任意の $m, n \in U$ に対して

$$v(F)(m, n) \iff m \leq n$$

で定められる U 上の 2 項関係であるとする。この解釈のもとでは、 $F(a, a)$ 、 $F(a, b)$ 、 $F(b, b)$ はいずれも真であるが、 $F(b, a)$ は偽である。これらが意味することはそれぞれ $0 \leq 0$ 、 $0 \leq 1$ 、 $1 \leq 1$ が成り立つが、 $1 \not\leq 0$ が成り立たないということである。さらにこの解釈のもとで、 $\neg F(b, a)$ 、 $F(a, a) \wedge F(a, b)$ 、 $F(b, a) \rightarrow F(a, a)$ などが真である。また任意の環境 ρ と任意の $u \in U$ に対して

$$(U, v) \models_{\rho(x \mapsto u)} F(x, x)$$

が成り立つ。従って

$$(U, v) \models_{\rho} \forall x F(x, x)$$

が成り立つ。これが意味することは U の任意の要素 u に対して $u \leq u$ が成り立つということである。また

$$(U, v) \models_{\rho(x \mapsto 1)} F(a, x)$$

が成り立つ。従って

$$(U, v) \models_{\rho} \exists x F(a, x)$$

が成り立つ。これが意味することは $0 \leq u$ を成り立たせるような u が U の中に存在するということである。

形式言語 $\mathcal{L}$ における妥当な推論を以下のように定義する。

定義 2.10 (妥当な推論、妥当式). $A_1, \dots, A_n$ から B への推論が妥当であるのは、 $A_1, \dots, A_n$ のすべてを真にし、 B を偽にするような解釈と環境が存在しない時である。またある論理式 A が妥当式であるのは、それを偽にするような解釈と環境が存在しない時である。

逆に言うと、ある推論（論理式）が妥当でないときにはその前提すべてを真にし結論を偽にするような解釈と環境（その論理式を偽にするような解釈と環境）が存在するというのである。そのような解釈と環境をその推論（論理式）が妥当でないことを示す反例という。

妥当な推論、妥当式に対して以下の表記を採用する。

- $A_1, \dots, A_n$ から B への推論が妥当 : $A_1, \dots, A_n \models B$
- A が妥当式 : $\models A$

推論（論理式）が妥当でないことを表すときは $\not\models$ を用いる。また $A \models B$ と $B \models A$ の両方が成り立つとき A と B は論理的に同値であるといい、 $A \simeq B$ と表記する。

例 2.11. 以下が成り立つ。ただし以下で $\iff$ はその左右の条件が互いに必要十分であることを表す。また D は自由変項として x を含まない論理式であるとする。

1. $A_1, A_2, \dots, A_n, A \models B \iff A_1, A_2, \dots, A_n \models A \rightarrow B$
2. $\neg\neg A \simeq A$
3. $A \rightarrow B, A \models B$
4. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \rightarrow C$
5. $\models A \rightarrow (B \rightarrow A)$
6. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
7. $A \rightarrow B, \neg B \models \neg A$
8. $(A \rightarrow B) \simeq (\neg B \rightarrow \neg A)$
9. $A, B \models A \wedge B$
10. $A_1 \wedge A_2 \models A_i \quad (i = 1, 2)$
11. $A \wedge B \models B \wedge A$
12. $A \simeq (A \wedge A)$
13. $A_i \models A_1 \vee A_2 \quad (i = 1, 2)$
14. $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C \models C$
15. $A \vee B, \neg A \models B$
16. $A \vee B \models B \vee A$
17. $A \simeq (A \vee A)$
18. $\neg(A \wedge B) \simeq (\neg A \vee \neg B)$
19. $\neg(A \vee B) \simeq (\neg A \wedge \neg B)$
20. $(A \wedge (B \vee C)) \simeq ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
21. $(A \vee (B \wedge C)) \simeq ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
22. $A \simeq (A \wedge (A \vee B))$
23. $A \simeq (A \vee (A \wedge B))$
24. $((A \vee B) \rightarrow C) \simeq ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$
25. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \simeq ((A \wedge B) \rightarrow C)$

- 26. $\models A \iff \models \forall x A$
- 27. $A[x/a] \models \exists x A$
- 28. $\forall x A \models A[x/a]$
- 29. $\forall x(A \wedge B) \simeq \forall x A \wedge \forall x B$
- 30. $\forall x(A \rightarrow B), \forall x A \models \forall x B$
- 31. $\forall x(A \rightarrow B), \exists x A \models \exists x B$
- 32. $\forall x(A \vee B) \models \forall x A \vee \exists x B$
- 33. $\forall x(A \wedge D) \simeq \forall x A \wedge D$
- 34. $\forall x(A \vee D) \simeq \forall x A \vee D$
- 35. $\exists x(A \vee B) \simeq \exists x A \vee \exists x B$
- 36. $\exists x A \wedge \forall x B \models \exists x(A \wedge B)$
- 37. $\exists x(A \rightarrow B), \forall x A \models \exists x B$
- 38. $\exists x(A \wedge D) \simeq \exists x A \wedge D$
- 39. $\exists x(A \vee D) \simeq \exists x A \vee D$
- 40. $(\exists x A \rightarrow D) \simeq \forall x(A \rightarrow D)$
- 41. $(\forall x A \rightarrow D) \simeq \exists x(A \rightarrow D)$

2.3 分析的反証法

前節において $A_1, \dots, A_n$ から B への推論が妥当であるのは、 $A_1, \dots, A_n$ のすべてを真にし、かつ B を偽にするような解釈と環境、すなわち反例が存在しない、ということと定義された。問題は、推論が妥当であるとき、反例が存在しないことをどのようにして確かめるのか、また推論が妥当でないとき、どのようにして反例を見つければよいか、ということである。このための方法が分析的反証法である。これは与えられた推論に対して、それを反証する解釈と環境が存在すると仮定することから始め、その仮定が成り立つための条件を定義にしたがって分析していくことで、その推論が妥当であれば矛盾を導き、その推論が妥当でなければ反例を導く、という方法である。

例 2.12. 1. $\forall x(F(x) \wedge G(x))$ から $\forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$ への推論が妥当かどうかをチェックしよう。いま仮にこれが妥当でないと仮定してみる。するとこの前提を真にして結論を偽にする解釈 (U, v) と環境 ρ が存在するはずである。つまり (1) $(U, v) \models_{\rho} \forall x(F(x) \wedge G(x))$ 、かつ (2) $(U, v) \not\models_{\rho} \forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$ 。(2) より (3) $(U, v) \not\models_{\rho} \forall x F(x)$ または (4) $(U, v) \not\models_{\rho} \forall x G(x)$ のどちらかが成り立たなければならない。(3) が成り立っているとしてみよう。このとき U に属するある対象 u に対して、(5) $(U, v) \not\models_{\rho(x \mapsto u)} F(x)$ 。一方、(1) より (6) $(U, v) \models_{\rho(x \mapsto u)} F(x) \wedge G(x)$ 。従って (7) $(U, v) \models_{\rho(x \mapsto u)} F(x)$ 。しかしこれは (5) と矛盾する。そこで次に (4) が成り立っているとしよう。このとき (U, v) のある対象 u' に対して、(8) $(U, v) \not\models_{\rho(x \mapsto u')} G(x)$ 。再び (1) より (9) $(U, v) \models_{\rho(x \mapsto u')} F(x) \wedge G(x)$ 。従って (10) $(U, v) \models_{\rho(x \mapsto u')} G(x)$ 。しかしこれは (8) に矛盾する。従って $\forall x(F(x) \wedge G(x))$ を

真にし、かつ $\forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$ を偽にするような解釈と環境の組は存在しない。従って $\forall x(F(x) \wedge G(x))$ から $\forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$ への推論は妥当である。

2. 次に $\forall x(F(x) \vee G(x))$ から $\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$ への推論が妥当かどうかをチェックしよう。先ほどと同様にこれが妥当でないと仮定する。そして前提を真にし、結論を偽にする解釈と環境をそれぞれ (U, v) と ρ とする。すなわち (1) $(U, v) \models_{\rho} \forall x(F(x) \vee G(x))$ 、かつ (2) $(U, v) \not\models_{\rho} \forall x F(x) \vee \forall x G(x)$ 。(2) より (3) $(U, v) \not\models_{\rho} \forall x F(x)$ かつ (4) $(U, v) \not\models_{\rho} \forall x G(x)$ 。(3) より (U, v) のある対象 u に対して (5) $(U, v) \not\models_{\rho(x \mapsto u)} F(x)$ 。また (1) より $(U, v) \models_{\rho(x \mapsto u)} F(x) \vee G(x)$ 。従って (6) $(U, v) \models_{\rho(x \mapsto u)} F(x)$ 、または (7) $(U, v) \models_{\rho(x \mapsto u)} G(x)$ 。(6) が成り立つとすると (5) と矛盾するので、(7) が成り立つ。また (4) より、 (U, v) のある対象 u' に対して (8) $(U, v) \not\models_{\rho(x \mapsto u')} G(x)$ 。再び (1) より (9) $(U, v) \models_{\rho(x \mapsto u')} F(x) \vee G(x)$ 、よって (10) $(U, v) \models_{\rho(x \mapsto u')} F(x)$ または (11) $(U, v) \models_{\rho(x \mapsto u')} G(x)$ 。(11) は (8) に矛盾するので (10) が成り立つ。ここには矛盾は生じていない。従って私たちは (1)(2)(3)(4)(5)(7)(8)(9)(10) を満たすモデルを考えればよい(分岐に注意。(6) と (11) の可能性は捨てられている)、ということになる。特に原子命題のみを含む (7) と (10) 注目して、 $U = \{u, u'\}$ 、解釈 $v(F) = \{u'\}$ 、 $v(G) = \{u\}$ となる (U, v) を考えれば良い。この推論の例では、論理式に定項も自由変項も現れないので、定項に対する割り当てと環境については任意で良い。

分析的な反証法は推論の妥当性をチェックするための強力な方法であるが、しかし複雑な推論をチェックするときには考慮しなければならないケースが増え、それらを見落としなくカバーすることは非常に難しくなる。この分析的な反証法をより分かりやすく、かつ機械的に遂行できるように工夫して作られたのが3章で紹介するタブローの方法である。

問題 2.5. 分析的な反証法によって 1.1 節の推論規則が実際に妥当な推論になっていることを示せ。

問題 2.6. 以下の推論が妥当であるかどうかを、分析的な反証法を使って示せ。

1. 前提：すべてのものの原因になっているものがある。
結論：すべてのものには原因がある。
2. 前提：ジョンは自分以外に誰も愛していない。
結論：ジョンに愛されていない人が存在する。
3. 前提 1：太郎が徹夜をすれば太郎は寝不足になる。
前提 2：太郎が寝不足だと太郎は試験に落ちる。
前提 3：太郎が勉強不足だと太郎は試験におちる。
結論：太郎は試験に落ちる。
4. 前提 1：すべての自然数は偶数か奇数かのどちらかである。
前提 2：すべての自然数が偶数というわけではない。
結論：奇数である自然数が存在する。
5. 前提：チームに不祥事を起こすものがあるとチームは試合に出られない。

結論：チームの誰が不祥事を起こしてもチームは試合に出られない。

6. 前提：角の生えた哺乳類はすべて草食である。

結論：すべての哺乳類について、それに角が生えていればそれは草食である。

2.4 自然言語と論理学のギャップ

非演繹的推論は論理学においては誤った推論とされるが、日常生活においては欠かせないものである。それらは確実に正しいとは言えなくても、しかし多くの場合に有用な信念を与えてくれる（この点に関しては6章で考察する）。一方で論理的な推論でありながら、特定の場合においては正しいとは思われぬようなものもある。たとえば「メアリーはステーキが好きか好きじゃないかのどちらかである」という文を考えよう。これは排中律の例であり、したがって妥当である（無条件に結論して良い）。しかしこれは本当に正しいと言えるだろうか。日本語ではしばしば、「好きじゃない」という言葉は単に「好き」という感情の不在ではなく、好きとは反対の感情の存在を示唆している。従って「好き」か「好きじゃない」のどちらかが必ず成り立つとは言えないのである。このことは例えば「すべての学生は村上春樹が好きか好きじゃないかのどちらかである」という文を考えればよりはっきりするだろう。この文もやはり論理的に妥当である。しかし少なくとも村上春樹を知らない、村上春樹の小説を読んだことのない人間にとっては、彼を好きということも彼を好きじゃないということも不適當に思われる。

同様の問題は二重否定律に関しても生じる。例えばあなたがメアリーに「ステーキのことは好きじゃないの？」と尋ねて、メアリーが「そういうわけじゃないけど…」と答えたとしよう。このときあなたがステーキに「メアリーは君のこと好きなんだって」と伝達することはおそらく非常に不適切だろう。あなたはメアリーから嘘つきと非難されても仕方がない。

条件文に関わる推論規則に対しても、様々な疑問がこれまでに提起されてきた。条件文は後件が真であれば、前件の真偽に関わらず真である（ $A \models B \rightarrow A$ ）。同様に条件文は前件が偽であれば後件の真偽に関わりなく真である（ $\neg A \models A \rightarrow B$ ）。従って例えば「太陽が東から昇るならば猫は哺乳類である」や「ビートルズが解散しなければ明治維新は起こらなかった」などの荒唐無稽な文が真になる。同じ理由で、矛盾する前提からはいかなる結論も導ける（ $A, \neg A \models B$ ）。これを爆発原理という。この原理は明らかに私たちの直観に反している。また対偶律によれば「久木田は奥さんに注意されないと散髪にいかない」からは「久木田は散髪に行くと奥さんに注意される」が導けるが、しかしこの推論が正しいとは到底思えない。

フレーゲの創始した量化学理論は数学的推論や概念を表現することを意図されたものであったが、日常言語には古典論理には翻訳できない様々な表現が存在している。例えば本書の形式言語には時制の表現は含まれていない。したがって

神は常に存在する。

神はかつて存在した。

のような正しい推論を本書の形式言語で表わすことはできない。また「…に違いない」、「…かもしれない」、「…ということはある得ない」などの蓋然性の度合いを表現することもできない。また「…する必要がある」、「…しても良い」などの義務や許可を表現することもできない。したがってたとえば

子供は入場料を払う必要はない。

子供は入場料を払わなくても良い。

のような推論は表現できない。また「ナポレオンは優れた将軍に要求されるあらゆる資質を持っていた」というような、対象ではなく性質に対する量化を含む表現もここでの形式言語では表現できない

このように自然言語と論理学の間には様々なギャップがある。しかしこれはある意味では望ましいことでもある。自然言語は論理学の目的にとっては無用な冗長性、多義性、細かなニュアンス、等々を含んでいる。論理学の言語はそれらを取り除いて抽象化したモデルである。科学におけるモデルは、現実とまったく同じものではなく、研究の目的にとって興味深い側面のみを取り出したものである。私たちはモデルの振る舞いを研究することによって、現実について近似的な知識を得ることができる。しかし現実のあらゆる側面にモデルから得られる知識を適用するのはモデルの乱用と言わなければならない。重要なのは、モデルの振る舞いが必ずしも現実を忠実に反映しているわけではないということ認識し、モデルから得られた知識を現実に適応できる場面とできない場面を見分けることである。

2.5 哲学への寄り道

本章で紹介した論理はフレーゲやラッセルが考案した論理を改良、洗練したもので、現在では古典論理と呼ばれている。古典論理は最も標準的、基礎的な論理体系として通用している。しかし上で見たように実際の言語の使用においては古典論理が適切でないように思われる様々な事例がある。また古典論理では表現できないような日常言語の表現もある。そういった問題を解決するために、これまでに様々な非古典論理が提案されている。そのごく一部を紹介しよう。L・E・J・ブラウワー (L. E. J. Brouwer, 1881-1966) は排中律や二重否定律は一般的には成り立たないと考えて、数学においてこれらを無制限に適用することを禁じることを提案した。このブラウワーの思想に基づいて直観主義論理と呼ばれる論理体系を構築された。古典論理の条件文が持つ様々なパラドクスを解決するために C・I・ルイス (C. I. Lewis, 1883-1964) らは様相論理に基づく厳密含意を提唱した。爆発原理を成立させない論理にはグレアム・プリースト (Graham Priest, 1948-) などによって提唱されている矛盾許容論理などがある。

フレーゲ、ラッセルは数学者・論理学者であると同時に、20 世紀を通じて大きく発展し

た分析哲学という伝統を創始した哲学者でもあった。分析哲学とは、言語分析を通じて、思考を明晰にし、それによって哲学的な問題に取り組む、という手法のことである。

分析哲学のもっとも重要な成果の一つと目されているのが、ラッセルによる記述の理論である。これは「黄金の山は存在しない」などの、存在しない対象についての言明がいかにして有意味でありうるかという問題に対する答えとして提案されたものである。従来の哲学者たち（初期のラッセルも含めて）は、このような言明が有意味であるためには「黄金の山」という名詞句が有意味でなければならない、従って「黄金の山」に対応する対象がなければならない、と考えた。オーストリアのアレクシウス・マイノング（1853-1920）はこの問題に対して、「黄金の山」のような語の指す対象は物理的対象と同じ仕方で存在しているわけではないが、しかし私たちの思考の対象として別の仕方で存在していると主張し、そのような存在を「存立」と呼んだ。

これに対してラッセルは、量化の理論を用いて「黄金の山は存在しない」のような命題を「黄金の山」のような語の指す対象を要求しないような仕方で分析した。単純化して言えば、ラッセルはこの命題を「いかなる対象も黄金でありかつ山であるということはない」という命題に翻訳したのである。これは形式言語で表現すれば $\neg \exists x(Fx \wedge Gx)$ という形式の命題であり、この中では通常の意味での存在者と異なるいかなる存在者も言及されていない。

しかし実際にはラッセルの理論はもっと複雑である。ラッセルが主な標的としたのは確定記述と呼ばれる言語表現であった。確定記述とは英語では「the + 単数名詞句」という形式をとる表現であり、通常この表現はその指示対象が唯一つ存在することを含意する。従ってこの名詞句に当てはまる対象が存在しないとき、あるいは複数存在するときにはその確定記述を含む文は偽であるように思われるのである。しかしこのことは厄介なパズルを生み出す。ラッセルが例に出すのが「現在のフランス国王はハゲである The present king of France is bald」という文である。現在、フランスには国王はいない。従ってこの文は偽であるように思われる。しかしだとすればこの文の否定、「現在のフランス国王はハゲではない」という文は真なのだろうか。とてもそうは思われぬ。従ってこの命題もその否定も真ではないという結論が導かれる。これは都合の悪いことである。なぜならば論理学においてはある命題かその否定のどちらかは真でなければならないからである（排中律）。

このパズルを解決するのがラッセルの記述の理論である。ラッセルは「現在のフランス国王はハゲである」という文を「現在のフランス国王であるような対象が存在し、かつそれは唯一であり、かつそれはハゲである」として解釈する。「…は現在のフランス国王である」を Fx 、「…はハゲである」を Bx 、「…と…は同一である」を Ixy によって表すことにすれば、この命題は形式言語で

$$\exists x(Fx \wedge (\forall y(Fy \rightarrow Ixy) \wedge Bx))$$

と表現できる。一方で「現在のフランス国王はハゲではない」という文は

$$\exists x(Fx \wedge (\forall y(Fy \rightarrow Ixy) \wedge \neg Bx))$$

と表現できる。これらがどちらも真ではないということには何の問題もない。 Fx を真にするような x の値がない時点で、この両方の論理式が偽になっているからである。

ラッセルの記述の理論は「分析哲学のパラダイム」ともよばれ、後の哲学に大きなインパクトを与えた。

第 3 章

妥当な推論の判定方法

本章では推論の妥当性をチェックするための方法をいくつか紹介する。特に重要なのはタブローと呼ばれる手続きである。というのはここで紹介する他の方法は限られた推論形式しかチェックできないものである一方で、タブローは 2 章で定義された妥当な推論の概念に対して、完全に一般的なテストだからである。またタブローは、推論の妥当性をチェックするためだけでなく、その推論が妥当でない時には反例を見つけるために使うことができる。

3.1 三段論法とルイス・キャロルの論理ゲーム

三段論法とはアリストテレスが体系化した妥当な推論の形式であり、典型的には 1 章 (6 ページ) で見た肯定三段論法、否定三段論法のように、三つの概念についての二つの前提から一つの結論を導く推論である。二つの前提はそれぞれ大前提、小前提と呼ばれる。大前提と小前提にはそれぞれ二つの概念が現れ、そのうち一つの概念が両者で共通している。またこれらの前提はそれぞれ結論と一つの概念を共有している。大前提と小前提に共通して現れる概念を中概念と呼ぶ。大前提と結論に共通して現れる概念を大概念、小前提と結論に共通して現れる概念を小概念と呼ぶ。結論は小概念を主語、大概念を述語として持つ。

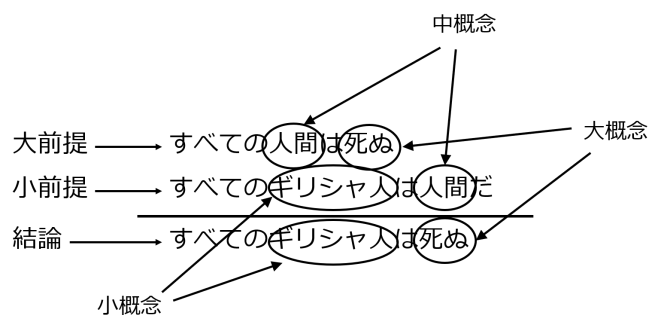


図 3.1 三段論法

大前提、小前提、結論はいずれも、「すべての A は B」、「すべての A は非 B（いかなる A も B ではない）」、「ある A は B（B であるような A が存在する）」、「ある A は非 B（B でないような A が存在する）」のいずれかの形式を持っている。これらの形式をそれぞれ A、E、I、O と呼ぶ。大前提、小前提、結論が 4 つの形式どれに該当するかによって 64 通りの組み合わせが考えられる。さらに大前提、小前提のそれぞれにおいて中概念が主語の位置にくるか述語の位置にくるかによって次の 4 通りの組み合わせが存在する。

	中概念の位置			
大前提	主語	主語	述語	述語
小前提	主語	述語	主語	述語

従って三段論法のパターンは全部で 256 通りあるということになる。そのうちで妥当な推論になっているものは 15 個である。

例えば

すべての人間は人間から生まれる。

ある動物は人間である。

ある動物は人間から生まれる。

という推論は大前提が A、小前提が I、結論が I で、中概念の位置が主語－述語になっている。

中世の学生たちは妥当な三段論法のパターンを覚えるために語呂合わせの詩を作って暗記したという。一方、ルイス・キャロルは、妥当な三段論法のパターンを判別するための以下のようなゲームを考案した。下図の大文字と小文字はそれぞれある性質の存在と不在を表している。すなわち大文字の X が書かれている区画はその中に含まれている対象が X という性質を持っていることを表している。例えば左上外側の区画は X と Y という性質を持ち、M という性質を持たない対象の領域を表す。

XYm	Xym
XYM	XyM
xYM	xyM
xYm	xym

三段論法の前提が与えられたとき、その形式に基づいてまず以下の操作を行う。

- 「すべての A は B」：A と b の含まれている二つの区画にそれぞれ黒いコマを一個ずつ置く。これはその区画に対象が含まれていないことを表す。
- 「すべての A は非 B」：A と B の含まれている二つの区画にそれぞれ黒いコマを一

個ずつ置く。

- 「ある A は B」: A と B の含まれている二つの区画の境界線に赤いコマを一つ置く。
このこれはその区画に対象が含まれていることを表す。
- 「ある A は非 B」: A と b の含まれている二つの区画の境界線に赤いコマを一つ置く。

次に赤いコマのまたがっている二つの区画のどちらかに黒いコマがおかれているならば、赤いコマを黒いコマがおかれていない区画の中に移動させる。

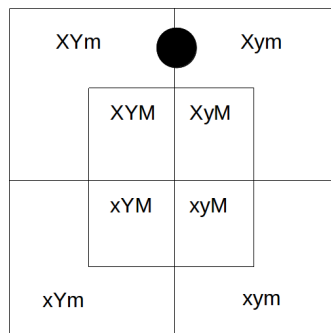
最後に内側の正方形を消す。この際、十字の線によって分割された四つの領域のそれぞれについて、内側の正方形の内部と外部のどちらかでも黒いコマのおかれていない領域からは黒いコマを（もしあれば）除去する。赤いコマについても同様にする。

図の上のコマの配置から読み取れる事実が二つの前提から得られる結論である。ある領域に赤いコマが置かれていればその領域には対象が存在するということであり、ある領域に黒いコマが置かれていればその領域には対象が存在しないということである。

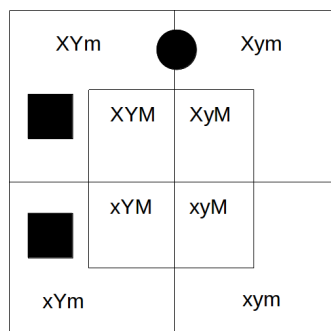
例えば次の二つの前提が与えられたとしよう。

1. ある X は m である。
2. すべての Y は M である。

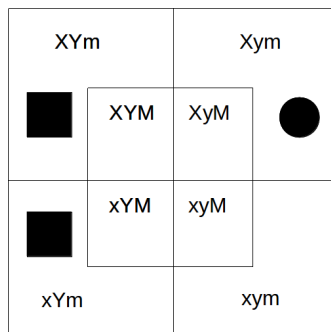
2 から、Y と m を含む区画の両方に、そこに対象が存在しないことを表す黒いコマを置く。



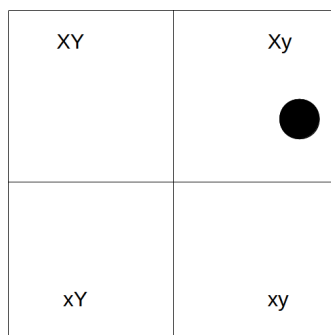
次に 1 の前提を考慮する。X と m を含む区画に、肯定を表す赤いコマを置く。このとき XYm と Xym の区画の境界をまたぐように置く。



しかし XYm の区画は既に黒いコマが置かれているので、赤いコマを Xym の側に移動させる。



最後に M と m の境界線を消し、 M と m の文字を消す。また M 、 m の境界の片方にしか黒いコマがない場合はそのコマを消去をする。

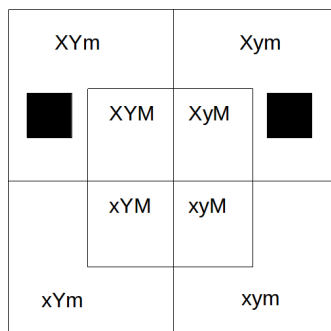


図から読み取れる結論は「ある X は y である」ということになる。

もう一つ例を挙げよう。次の前提が与えられたとする。

1. すべての X は M である。
2. すべての M は Y である。

前提 1 から、 X と m を含む区画の両方に、そこに対象が存在しないことを表す黒いコマを置く。



前提 2 から、 M と y を含む区画の両方に、そこに対象が存在しないことを表す黒いコマを置く。

XYm	Xym
 XYM	XyM 
xYM	xyM
xYm	xym

最後に M と m の境界を取り除き、境界の両方に黒いコマがある区画（ここでは右上）にだけコマを残す。

XY	Xy 
xY	xy

ここから読み取れるのは「X でありかつ非 Y である対象は存在しない」ということ、従って「すべての X は Y である」ということである。

問題 3.1. 以下の前提の対からどのような結論が導かれるかを上の方法を使って考えなさい。

1. 「すべての馬は走る」と「ある猫は走る」。
2. 「すべてのクレタ人は人間である」と「ある動物は人間ではない」
3. 「いかなる魚も飛ばない」と「鳥はすべて飛ぶ」
4. 「ある人間は嘘をつく」と「嘘をつく動物はいない」
5. 「いかなる魚も飛ばない」と「ある昆虫は飛ぶ」
6. 「ある哺乳類は飛ぶ」と「哺乳類はすべて卵を生まない」

3.2 命題論理とエルブランの書き換えアルゴリズム

私たちが現在考察している論理学は一階述語論理と呼ばれる論理に属するものであり、それは対象に対する全称量化と存在量化を持つことを特徴としている。一階述語論理から量化に関連する部分を取り除き、結合子に関する推論のみを取り出すと命題論理と呼ばれる体系が得られる。命題論理においては論理式の項-述語構造は意味を持たない。というのも任意の述語 F と項 t, t' に対して、 Ft と Ft' の真偽はまったく独立だからである。そ

れゆえ命題論理の解釈はすべての原子命題に対する真偽の割り当てのみで決定される（定項や述語に対する割り当て、環境は考慮する必要はない）。

命題論理の一般的な構文論と意味論は以下のようなシンプルなものである。

定義 3.1 (命題論理の構文論). 原子式の集合が与えられているとする。 $p, q, r, \dots$ によって任意の原子式を表す。このとき命題論理の論理式が以下のように定義される。

1. 任意の原子式は命題論理の論理式である。
2. A, B が命題論理の論理式であるとき、 $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$ は命題論理の論理式である。
3. 以上によって命題論理の論理式と判定できるものだけが命題論理の論理式である。

本節では以下、命題論理の論理式を単に論理式と呼ぶ。

定義 3.2 (命題論理の解釈). 原子式それぞれに対して真か偽の値を割り当てる方法を命題論理の解釈と呼ぶ。

本節では以下、命題論理の解釈を単に解釈と呼ぶ。 v を解釈、 p とするとき、 v が p に割り当てる真理値を $v(p)$ によって表すことにする。

定義 3.3 (論理式の真偽). v は命題論理の一つの解釈であるとする。 v における論理式の真偽が以下のように定義される。

1. 原子式 p が v において真であるのは、 $v(p) = \top$ の時であり、それ以外の場合は p は v において偽である。
2. $\neg A$ が v において真であるのは、 A が v において偽の時であり、それ以外の場合は $\neg A$ は v において偽である。
3. $A \wedge B$ が v において真であるのは、 A と B がともに v において真の時であり、それ以外の場合は $A \wedge B$ は v において偽である。
4. $A \vee B$ が v において真であるのは、 A と B の少なくとも一方が v において真の時であり、それ以外の場合は $A \vee B$ は v において偽である。
5. $A \rightarrow B$ が v において真であるのは、 A が v において偽であるか、 B が v において真であるかの少なくともどちらか一方が成り立っている時であり、それ以外の場合は $A \rightarrow B$ は v において偽である。

定義 3.4 (妥当な推論、妥当式、トートロジー). 妥当な推論と妥当式の定義は一階述語論理の場合と同様である。すなわち $A_1, \dots, A_n$ から B への推論が妥当であるのは $A_1, \dots, A_n$ のすべてを真にし、 B を偽にする解釈が存在しないときである。また論理式 A が妥当式であるのは A を偽にする解釈が存在しない時である。命題論理の妥当式を特にトートロジーと呼ぶ。

一階述語論理の場合と同様、妥当な推論、妥当式に対して以下の表記を採用する。

- $A_1, \dots, A_n$ から B への推論が妥当 : $A_1, \dots, A_n \models B$
- A がトートロジー : $\models A$

例 2.11 の 2-25 は命題論理における妥当な推論とトートロジーである。

以下はエルブランによって発見された、トートロジーの判定アルゴリズムである。以下で x, y, z は任意の論理式、もしくは 0 か 1 のどちらかであるとする。

規則 1	$x \rightarrow y$	$\implies$	$((x \cdot y) + x) + 1$
規則 2	$x \wedge y$	$\implies$	$x \cdot y$
規則 3	$x \vee y$	$\implies$	$((x \cdot y) + x) + y$
規則 4	$\neg x$	$\implies$	$x + 1$
規則 5	$x + 0$	$\implies$	x
規則 6	$x + x$	$\implies$	0
規則 7	$x \cdot 0$	$\implies$	0
規則 8	$x \cdot 1$	$\implies$	x
規則 9	$x \cdot x$	$\implies$	x
規則 10	$x \cdot (y + z)$	$\implies$	$(x \cdot y) + (x \cdot z)$
規則 11	$x + (y + z)$	$\iff$	$(x + y) + z$
規則 12	$x + y$	$\implies$	$y + x$
規則 13	$x \cdot (y \cdot z)$	$\iff$	$(x \cdot y) \cdot z$
規則 14	$x \cdot y$	$\implies$	$y \cdot x$

これらの規則に従って論理式を書き換え、そのプロセスが 1 で終了するとき、そしてそのときに限り、最初の式はトートロジーである。

例えば $A \vee \neg A$ を考えよう。上の規則に従ってこの式を書き換えると次のようになる。以下で下線が引かれた部分はその次のステップで規則が適用される部分、矢印の下に数字はそこで適用されている規則の番号を表す。

$$\begin{aligned}
A \vee \neg A &\implies_4 \underline{A \vee (A + 1)} \\
&\implies_3 \underline{((A \cdot (A + 1)) + A) + (A + 1)} \\
&\implies_{10} \underline{(((A \cdot A) + (A \cdot 1)) + A) + (A + 1)} \\
&\implies_9 \underline{((A + (A \cdot 1)) + A) + (A + 1)} \\
&\implies_8 \underline{((A + A) + A) + (A + 1)} \\
&\implies_{11} \underline{(((A + A) + A) + A) + 1} \\
&\implies_6 \underline{((0 + A) + A) + 1} \\
&\implies_{12} \underline{((A + 0) + A) + 1} \\
&\implies_5 \underline{(A + A) + 1} \\
&\implies_6 \underline{0 + 1} \\
&\implies_{12} \underline{1 + 0} \\
&\implies_5 1
\end{aligned}$$

従って $A \vee \neg A$ はトートロジーである。

問題 3.2. エルブランのアルゴリズムを使って、例 2.11 のトートロジーがトートロジーであることを確かめよ。また適当な論理式を考え、それがトートロジーであるかどうかをチェックせよ。

問題 3.3. エルブランの手続きによって、命題論理における任意の妥当な推論もチェックできることを説明せよ。(ヒント：例 2.11 の 2 を使う。)

3.3 タブローとは

前節と前々節で紹介した手続きはどちらも一階述語論理の限定された部分にのみ適用できるものである。ルイス・キャロルの手続きは三段論法の形式の推論にのみ適用できる。エルブランの手続きは命題論理の推論にのみ適用できる。それに対してこの節で紹介するタブローの方法は、一階述語論理の任意の推論に適用でき、それが妥当な推論である場合には必ず有限のステップでそのことを確かめることができる。その分、手続きは複雑になるが、慣れる効率よく推論の妥当性がチェックできるようになり便利である。

タブローとは分析的反証法のプロセスを図式的に表わしたものの、あるいはその形成の方法のことである。タブローにおいては、分析的反証法のプロセスが、式を樹形図のように配置することによって表現される。実際の木と異なり、タブローは上から下へと枝分かれするように描くのが慣例である。タブローにはまず前提に現れる式と結論の否定が並べられる。それらは順次その形式に従ってより単純な式へと分解され、タブローの末端に新たに付け加えられる。タブローの形成は、すべての式がそれ以上分解できない形（原子命題もしくはその否定）まで分解されたとき、あるいは、すべての分岐において矛盾が生じたときに終了する。以下では原子命題もしくはその否定の形をした命題をリテラルと呼ぶことにする。例えば 2.3 節の例 2.12 の 1 の論証に対応するタブローは図 3.2 のようになる（図のタブローの中に現れる式に振られた番号は例 2.12 の 1 の論証のステップに対応する。通常のタブローではこのような番号は振られない）。

タブローの一番上に現れる式（図 3.2 の中では $\forall x(F(x) \wedge G(x))$ ）を根と呼ぶ。また末端に現れる式（図 3.2 の中では Fa と Gb ）を葉と呼ぶ。根から一つの葉に至る経路を枝と呼ぶ。例えば図 3.2 のタブローには二つの枝があり、一方は $\forall x(F(x) \wedge G(x), \neg(\forall xF(x) \wedge \forall xG(x)), \neg\forall xF(x), \neg F(a), F(a) \wedge G(a), F(a), G(a)$ を含み、もう一方は $\forall x(F(x) \wedge G(x), \neg(\forall xF(x) \wedge \forall xG(x)), \neg\forall xG(x), \neg G(b), F(b) \wedge G(b), F(b), G(b)$ を含んでいる。ある枝にある論理式とその否定が現れているとき、その枝は閉じていると呼ばれる。またタブローのすべて枝が閉じている時はそのタブローが閉じていると呼ばれる。従って図 3.2 のタブローは閉じている。枝の下に $\times$ はその枝が閉じていることを表している。

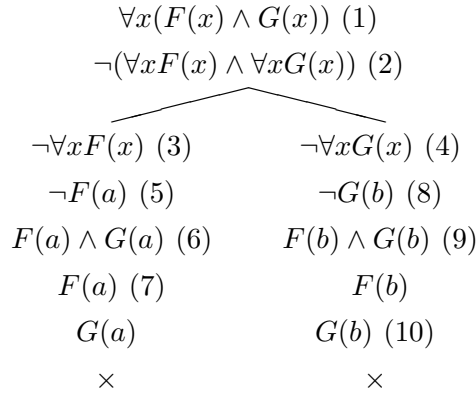


図 3.2 $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \models \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$ をチェックするタブロー

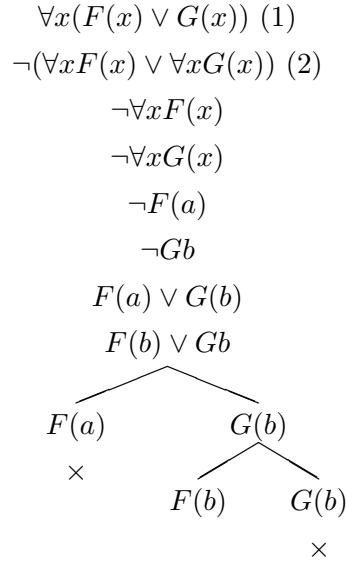


図 3.3 $\forall x(Fx \vee Gx) \not\models \forall xFx \vee \forall xGx$ をチェックするタブロー

タブローにおける分岐は、論証における場合分けに対応する。タブローがある枝が閉じるということは、その枝に対応する場合において矛盾が生じるということを表している。上の例で言えば、左側の分岐は $\forall xF(x)$ が偽である場合に対応しているが、しかしその場合においてはある a に対して $F(a)$ と $\neg F(a)$ が真であるということになって矛盾が生じる。他方、右側の分岐は $\forall xG(x)$ が偽である場合に対応しており、この場合においてもやはり Gb と $\neg G(b)$ が矛盾する。したがってどちらの可能性を考えても矛盾するので、この推論に対する反例は存在し得ないということが分かるのである。

タブローが閉じるということと、対象になっている推論が妥当であるということの間には必要十分の関係が成り立っている。

3.4 タブローの規則

本節ではタブローを形成するための具体的な手続きを規則を紹介する。

タブローを形成するためにはまず、チェックしたい推論の前提に含まれる論理式を縦に並べ、さらにその下に結論の否定を縦に並べる。前提なしの推論であれば結論の否定だけを書く。次にタブローに現れている式に対して、その形式に応じて以下の規則を適用する。

1. 二重否定： $\neg\neg A$ が現れている開いた枝の先に A を書き加える。
2. 連言肯定： $A \wedge B$ が現れている開いた枝の先に A と B を縦に書き加える。
3. 連言否定： $\neg(A \wedge B)$ が現れている開いた枝の先を二股に分岐させて、一方に $\neg A$ を、他方に $\neg B$ を書き加える。
4. 選言肯定： $A \vee B$ が現れている開いた枝の先を二股に分岐させて、一方に A を、他方に B を書き加える。
5. 選言否定： $\neg(A \vee B)$ が現れている開いた枝の先に $\neg A$ と $\neg B$ を縦に書き加える。
6. 条件肯定： $A \rightarrow B$ が現れている開いた枝の先を二股に分岐させて、一方に $\neg A$ を、他方に B を書き加える。
7. 条件否定： $\neg(A \rightarrow B)$ が現れている開いた枝の先に A と $\neg B$ を縦に書き加える。
8. 全称肯定： $\forall x A$ が含まれている開いた枝の先に $A[x/a]$ を書き加える。ただしここで a は同じ枝に含まれている任意の定項とする。定項が複数含まれている場合は、それぞれの定項に対してこの規則を適用する。その枝に定項が現れていない場合はタブローに現れていない任意の定項 a を選び、 $A[x/a]$ をその枝の先に書き加える。
9. 全称否定： $\neg\forall x A$ が現れている開いた枝の先に $\neg A[x/b]$ を書き加える。ただしここで b はその枝に現れていない定項であるとする。
10. 特称肯定： $\exists x A$ が現れている開いた枝の先に $A[x/b]$ を書き加える。ただしここで b はその枝に現れていない定項であるとする。
11. 特称否定： $\neg\exists x A$ が現れている開いた枝の先に $\neg A[x/a]$ を書き加える。ただしここで a は同じ枝に含まれている任意の定項とする。定項が複数含まれている場合は、それぞれの定項に対してこの規則を適用する。その枝に定項が現れていない場合はタブローに現れていない任意の定項 a を選び、 $A[x/a]$ をその枝の先に書き加える。
12. 以上の規則のすべてについて、もしある枝に書き加えることになる式がすでにその枝のどこかに現れているならば、その式は書き加えなくても良い。

以下の図は、規則のイメージをつかむのに有用だろう。

$\neg\neg A$
 $\vdots$
 A
 二重否定

$A \wedge B$
 $\vdots$
 A
 B
 連言肯定

$\neg(A \wedge B)$
 $\vdots$
 $\wedge$
 $\neg A \quad \neg B$
 連言否定

$A \vee B$
 $\vdots$
 $\wedge$
 $A \quad B$
 選言肯定

$\neg(A \vee B)$
 $\vdots$
 $\neg A$
 $\neg B$
 選言否定

$A \rightarrow B$
 $\vdots$
 $\wedge$
 $\neg A \quad B$
 条件肯定

$\neg(A \rightarrow B)$
 $\vdots$
 A
 $\neg B$
 条件否定

$\forall x A$
 $\dots a \dots$
 $\vdots$
 $A[x/a]$
 全称肯定

$\neg\forall x A$
 $\vdots$
 $\neg A[x/b]$
 全称否定

$\exists x A$	$\neg \exists x A$
$\vdots$	$\dots a \dots$
$A[x/b]$	$\vdots$
	$\neg A[x/a]$
特称肯定	特称否定

以上の規則のうち、全称肯定と特称否定以外の規則に関しては、ある式（の現れ）に一度適用されたならば、その式（の現れ）にはもう適用しなくても良い。というのもそれらの規則の適用によって付け加えられる式は常に同じであるために、12 によってその規則の適用は免除されるからである。一方で全称肯定と特称否定に関しては全称否定あるいは特称肯定の適用によって新しい定項が導入されるたびに再び適用しなければならない。

3.5 タブローの実例

では実際にタブローの形成の例を見ていこう。「爬虫類または鳥類はすべて卵生である」から「卵生でないものは爬虫類でも鳥類でもない」ということが推論できる。この推論は形式言語で表現すれば $\forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow \neg H(x))$ から $\forall(H(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x)))$ への推論である。タブローを作るにはまず前提と、結論の否定を並べる (1)。次に 2 つめの論理式に特称否定の規則を適用して、 $\neg(H(a) \rightarrow (\neg F(a) \wedge \neg G(a)))$ をタブローに書き加える (2)。

$$\begin{array}{ll}
 \forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow \neg H(x)) & \forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow \neg H(x)) \\
 \neg \forall x(H(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x))) & \neg \forall x(H(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x))) \checkmark \\
 (1) & \neg(H(a) \rightarrow (\neg F(a) \wedge \neg G(a))) \\
 & (2)
 \end{array}$$

続いて $\neg(H(a) \rightarrow (\neg F(a) \wedge \neg G(a)))$ に条件否定を適用して、タブローの下に $H(a)$ と $\neg(\neg F(a) \wedge \neg G(a))$ を縦に書き加える (3)。 $\neg(\neg F(a) \wedge \neg G(a))$ に連言肯定を適用して、タブローの先を分岐させて、それぞれの先に $\neg\neg F(a)$ と $\neg\neg G(a)$ を書き加える (4)。

$$\begin{array}{ll}
 \forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow \neg H(x)) & \forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow \neg H(x)) \\
 \neg \forall x(H(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x))) \checkmark & \neg \forall x(H(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x))) \checkmark \\
 \neg(H(a) \rightarrow (\neg F(a) \wedge \neg G(a))) \checkmark & \neg(H(a) \rightarrow (\neg F(a) \wedge \neg G(a))) \checkmark \\
 H(a) & H(a) \\
 \neg(\neg F(a) \wedge \neg G(a)) & \neg(\neg F(a) \wedge \neg G(a)) \checkmark \\
 (3) & \swarrow \quad \searrow \\
 & \neg\neg F(a) \quad \neg\neg G(a) \\
 & (4)
 \end{array}$$

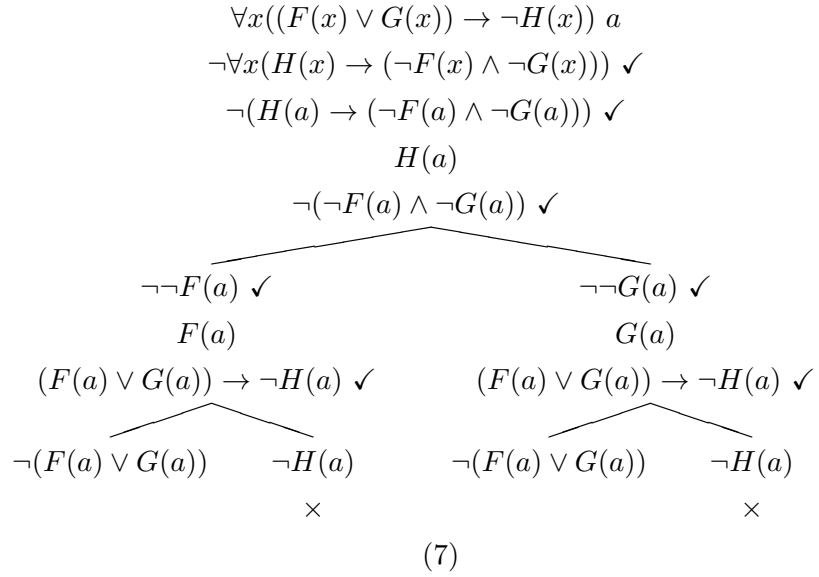
$\neg\neg F(a)$ と $\neg\neg G(a)$ に二重否定を適用する (5)。

$$\begin{array}{c}
\forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow \neg H(x)) \\
\neg \forall x(H(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x))) \checkmark \\
\neg(H(a) \rightarrow (\neg F(a) \wedge \neg G(a))) \checkmark \\
H(a) \\
\neg(\neg F(a) \wedge \neg G(a)) \checkmark \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg\neg F(a) \checkmark \quad \neg\neg G(a) \checkmark \\
F(a) \quad G(a) \\
(5)
\end{array}$$

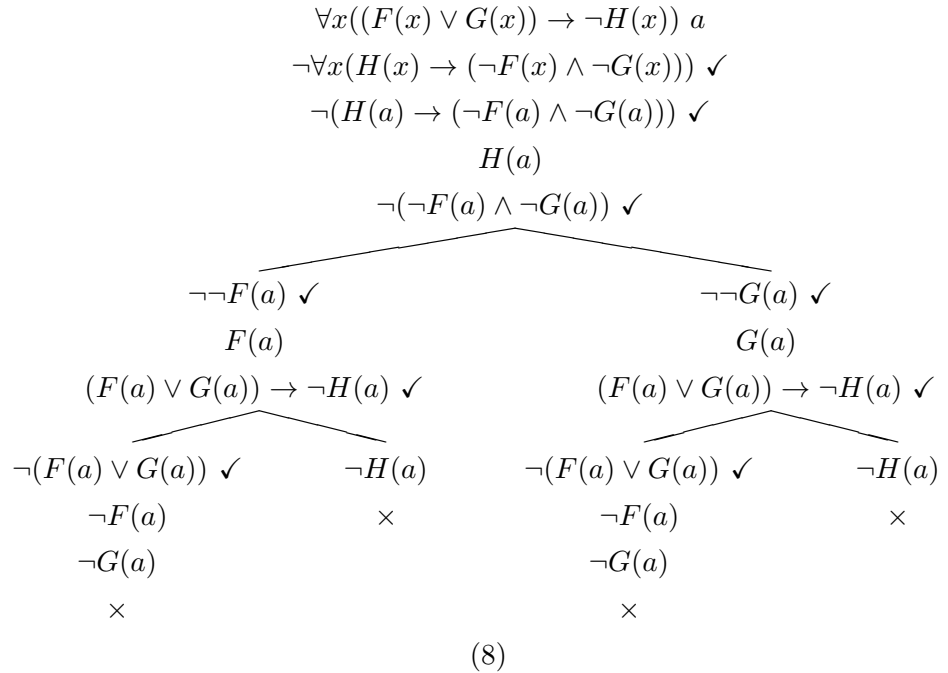
$\forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow \neg H(x))$ に全称肯定を適用する。枝に現れている定項は a なので、 $(F(a) \vee G(a)) \rightarrow \neg H(a)$ を枝の先端に書き加える。このとき分岐した両方の枝に書き加えることに注意しよう (6)。下図において $\forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow \neg H(x))$ の右に a を書き加えているのは、この論理式と定項 a に関して全称肯定を適用したことを表している。全称肯定はその枝に現れるすべての定項に関して適用しなければならないことに注意しよう。

$$\begin{array}{c}
\forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow \neg H(x)) \ a \\
\neg \forall x(H(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x))) \checkmark \\
\neg(H(a) \rightarrow (\neg F(a) \wedge \neg G(a))) \checkmark \\
H(a) \\
\neg(\neg F(a) \wedge \neg G(a)) \checkmark \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg\neg F(a) \checkmark \quad \neg\neg G(a) \checkmark \\
F(a) \quad G(a) \\
(F(a) \vee G(a)) \rightarrow \neg H(a) \quad (F(a) \vee G(a)) \rightarrow \neg H(a) \\
(6)
\end{array}$$

$(F(a) \vee G(a)) \rightarrow \neg H(a)$ に条件肯定を適用する。枝の先を分岐させてそれぞれの先に $\neg(F(a) \vee G(a))$ と $\neg H(a)$ を書く。この時、後者の枝には $H(a)$ と $\neg H(a)$ という論理式が含まれることになる。従ってこの枝は閉じている。



最後に $\neg(F(a) \vee G(a))$ に選言否定を適用して、枝の先に $\neg F(a)$ と $\neg G(a)$ を縦に並べて書く (8)。



このときこのタブローのすべての枝が閉じている。従って $\forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow \neg H(x))$ から $\forall x(H(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x)))$ への推論は妥当であることが分かる。

タブローがもっとも効力を発揮するのは、妥当でない推論に対する反例を見つける時である。そこで次は妥当でない推論に対してタブローの方法を摘要してみよう。「角のある哺乳類がいる」ということと「空を飛ぶ哺乳類がいる」ということから「角があり空を飛ぶ哺乳類がいる」ということは推論できない。この推論は形式言語では

$\exists x(F(x) \wedge G(x)), \exists x(H(x) \wedge G(x))$ から $\exists x(F(x) \wedge (H(x) \wedge G(x)))$ への推論として表現することができる。この推論をチェックするタブローは前提二つと、結論の否定を縦に並べた状態から始まる (1)。上二つの論理式に特称肯定を適用する。ここで二つの新しい定項を導入しなければならない (2)。

$\exists x(F(x) \wedge G(x))$	$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \checkmark$
$\exists x(H(x) \wedge G(x))$	$\exists x(H(x) \wedge G(x)) \checkmark$
$\neg \exists x(F(x) \wedge (H(x) \wedge G(x)))$	$\neg \exists x(F(x) \wedge (H(x) \wedge G(x)))$
	$F(a) \wedge G(a)$
	$H(b) \wedge G(b)$
(1)	(2)

$F(a) \wedge G(a)$ および $H(b) \wedge G(b)$ に連言肯定を適用する (3)。 $\neg \exists x(F(x) \wedge (H(x) \wedge G(x)))$ と a に対して特称否定を適用する (4)。

$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \checkmark$	$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \checkmark$
$\exists x(H(x) \wedge G(x)) \checkmark$	$\exists x(H(x) \wedge G(x)) \checkmark$
$\neg \exists x(F(x) \wedge (H(x) \wedge G(x)))$	$\neg \exists x(F(x) \wedge (H(x) \wedge G(x))) a$
$F(a) \wedge G(a) \checkmark$	$F(a) \wedge G(a) \checkmark$
$H(b) \wedge G(b) \checkmark$	$H(b) \wedge G(b) \checkmark$
$F(a)$	$F(a)$
$G(a)$	$G(a)$
$H(b)$	$H(b)$
$G(b)$	$G(b)$
	$\neg(F(a) \wedge (H(a) \wedge G(a)))$
(3)	(4)

$\neg(F(a) \wedge (H(a) \wedge G(a)))$ に連言否定を適用して枝を分岐させ、それぞれの先に $\neg F(a)$ と $\neg(H(a) \wedge G(a))$ を加える (5)。 $\neg F(a)$ の含まれている枝は閉じている。 $\neg(H(a) \wedge G(a))$ に再び連言否定を適用して、枝を分岐させそれぞれの先に $\neg H(a)$ と $\neg G(a)$ を加える (6)。 $\neg G(a)$ の含まれている枝は閉じている。

$$\begin{array}{c}
\exists x(F(x) \wedge G(x)) \checkmark \\
\exists x(H(x) \wedge G(x)) \checkmark \\
\neg \exists x(F(x) \wedge (H(x) \wedge G(x))) \ a \\
F(a) \wedge G(a) \checkmark \\
H(b) \wedge G(b) \checkmark \\
F(a) \\
G(a) \\
H(b) \\
G(b) \\
\neg(F(a) \wedge (H(a) \wedge G(a))) \checkmark \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg F(a) \quad \neg(H(a) \wedge G(a)) \\
\times
\end{array}$$

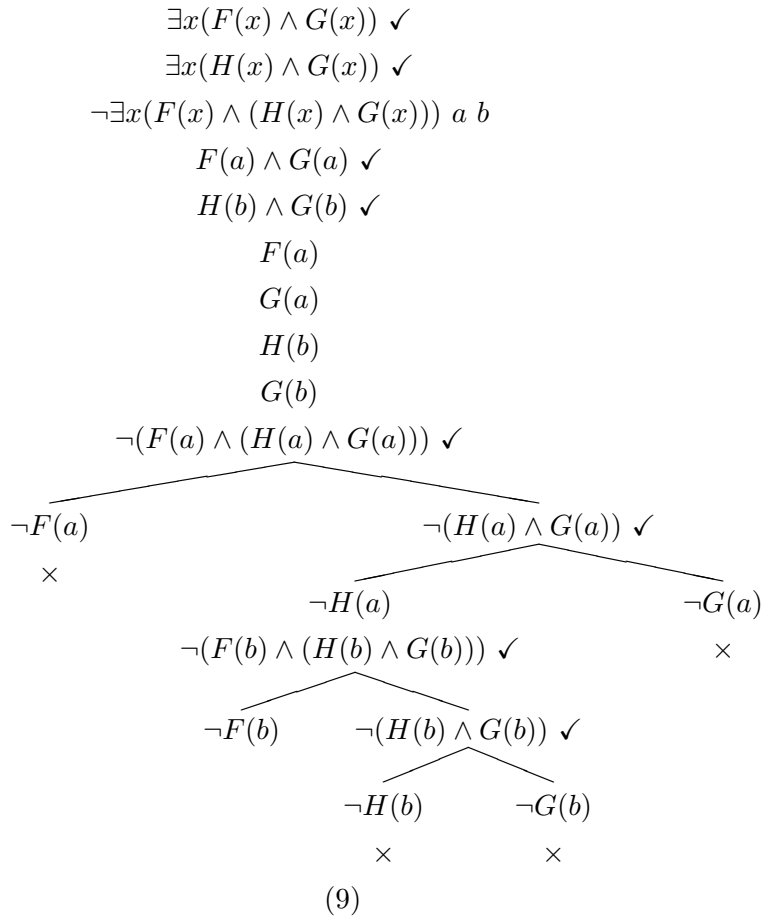
(5)

$$\begin{array}{c}
\exists x(F(x) \wedge G(x)) \checkmark \\
\exists x(H(x) \wedge G(x)) \checkmark \\
\neg \exists x(F(x) \wedge (H(x) \wedge G(x))) \ a \\
F(a) \wedge G(a) \checkmark \\
H(b) \wedge G(b) \checkmark \\
F(a) \\
G(a) \\
H(b) \\
G(b) \\
\neg(F(a) \wedge (H(a) \wedge G(a))) \checkmark \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg F(a) \quad \neg(H(a) \wedge G(a)) \checkmark \\
\times \quad \swarrow \quad \searrow \\
\quad \neg H(a) \quad \neg G(a) \\
\quad \quad \times
\end{array}$$

(6)

$\neg \exists x(F(x) \wedge (H(x) \wedge G(x)))$ に今度は b に関して全称肯定を適用する。 $F(b) \wedge (H(b) \wedge G(b))$ を開いている枝の下に書く (8)。

$$\begin{array}{c}
\exists x(F(x) \wedge G(x)) \checkmark \\
\exists x(H(x) \wedge G(x)) \checkmark \\
\neg \exists x(F(x) \wedge (H(x) \wedge G(x))) \ a \ b \\
F(a) \wedge G(a) \checkmark \\
H(b) \wedge G(b) \checkmark \\
F(a) \\
G(a) \\
H(b) \\
G(b) \\
\neg(F(a) \wedge (H(a) \wedge G(a))) \checkmark \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg F(a) \quad \neg(H(a) \wedge G(a)) \checkmark \\
\times \quad \swarrow \quad \searrow \\
\quad \neg H(a) \quad \neg G(a) \\
\quad \neg(F(b) \wedge (H(b) \wedge G(b))) \quad \times \\
(8)
\end{array}$$



これ以上適用できる規則はないので、タブローの形成は完了している。しかしこのタブローには開いている枝がある。その枝に現れている原子式を参照することで、この推論に対する反例を見つけることができる。その手続きは具体的には次のように記述できる。

1. 開いた枝を一本選び、そこに現れている定項を列挙する。それらを $a_1, \dots, a_n$ とする。
2. $U = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、これを個体領域とする。また各 $a_i (1 \leq i \leq n)$ に対して $I(a_i) = i$ とする。それ以外の定項に対しては I は何を割り当てても良い。
3. 同じ枝に現れている述語を列挙する。これを $P_1, \dots, P_m$ とする。
4. I は各述語 $P_i (1 \leq i \leq m)$ に対して、原子式 $P_i(b_1, \dots, b_k)$ がこの枝に現れるならば $I(b_1), I(b_2), \dots, I(b_k)$ に対して成り立ち、そうでないときには成り立たない関係を割り当てる。

この例では開いた枝に a, b という定項、 $G(b), H(b), G(a), F(a)$ という原子式が現れている。従って例えば $U = \{1, 2\}$ からなる集合とし、 I は a に 1、 b に 2、 F に「…は奇数」という性質、 G には「…は自然数」という性質、 H には「…は偶数」という性質を割り当てるものとする。このとき解釈 (U, I) は実際に上の推論に対する反例になっている。1 は奇数、2 は偶数なので、この解釈のもとでは $F(a)$ 、 $H(b)$ は真であり、一方で

$F(b)$ と $H(a)$ は偽である。また 1 も 2 も自然数なので $G(a), G(b)$ はともに真である。ここから $F(a) \wedge G(a)$ および $H(b) \wedge G(b)$ は真である。ここから $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ および $\exists x(H(x) \wedge G(x))$ が真であることが分かる。一方で $F(b)$ と $G(a)$ が偽なので任意の環境 ρ に対して $(U, I) \models_{\rho_{x \mapsto 1}} F(x) \wedge (H(x) \wedge G(x))$ も $(U, I) \models_{\rho_{x \mapsto 2}} F(x) \wedge (H(x) \wedge G(x))$

問題 3.4. タブローを使って、練習問題 2.6 の推論の妥当性を判定せよ。妥当でない場合は反例を示せ。

3.6 哲学への寄り道

ある対象の集まり U が与えられているとする。性質 C は U に属する対象のあるものは持ち、あるものは持っていないと考えられる性質であるとする（極端なケースとして U のすべての対象が C を持つこと、あるいは U のいかなる対象も C を持たないこともありうる）。判定手続き P は U の任意の対象に適用され、 C に関して陽性か陰性のどちらかの結果を出す手続きであるとする（場合によっては不明という結果をだすことも許すものとする）。 P が性質 C を持つすべての対象に対して陽性という結果を出すとき、 P は C に対して完全であるという。言い換えると、 P が C に対して完全な手続きならば C を持ちながら陽性と診断されない対象はないということである。 C 逆に P によって陽性という結果が出た対象すべてが性質 C を持つとき、 P は C に対して健全であるという。言い換えると P が健全ならば陽性と診断されながら性質 C を持たない対象はないということである。ある性質に対して完全かつ健全な手続きは、その性質を持つ対象を過不足なく選び出すことができる。

例えば裁判を考えよう。裁判は容疑者の集団の中から、あるものを有罪（陽性）、あるものを無罪（陰性）と判定する手続きである。犯罪者に対して完全な裁判とは、実際に罪を犯した容疑者すべてを有罪とする裁判である。健全な裁判とは、実際に罪を犯していない容疑者すべてを無罪とする裁判である。もちろん裁判は完全かつ健全であることが望ましい。しかし完全性を目指して少しでも疑わしいものには有罪判決を出すようにすれば健全性を達成することが難しくなる（無実の人間を有罪にする可能性が上がる）。逆に健全性を目指してよほど確実な証拠がない限りは有罪判決を出さないようにすれば完全性を達成することが難しくなる（犯罪者に無罪放免にする可能性が上がる）。現実の裁判は完全でも健全でもなく、無実のものを有罪にしてしまうこともあれば本当の犯罪者を無罪にしてしまうこともある。（例外は魔女裁判である。魔女裁判は二重の意味でトリビアルな完全性を持つ。第一に、裁判にかけられたものはすべて有罪になる。第二に、そもそも魔女などは存在しない。）

本章で紹介したタブローの方法は古典一階述語論理における妥当性に関して完全かつ健全な判定手続きになっている。すなわち以下が成り立つ。

1. 完全性 : $A_1, \dots, A_n \models B$ ならば $A_1, \dots, A_n$ から B への推論をチェックするタブ

ローが閉じる。

2. 健全性： $A_1, \dots, A_n$ から B への推論をチェックするタブローが閉じるならば $A_1, \dots, A_n \models B$ 。

したがってタブローの方法は古典一階述語論理に対する完璧なテストになっている*¹。

ある論理に対して、その妥当性をテストするための形式的な手続きをその論理の形式的体系と呼ぶ。古典一階述語論理に関しては、タブロー以外にもいくつかの完全かつ健全な形式的体系が知られている。

フレーゲやラッセルらによって創始された述語論理は、当初はその構文論に関して明確でない部分があった。また意味論は存在せず、記号の意味はインフォーマルな仕方で説明されるだけであった。それを現在知られるような形に洗練させたのはドイツの数学者ダーフィット・ヒルベルトとその弟子たち、ドイツの論理学者ゲルハルト・ゲンツェン、ポーランドの数学者・論理学者アルフレッド・タルスキらであった。ゲンツェンはいくつかの形式的体系の定式化を行い、それらの性質についての研究において重要な結果を残した。この分野は現在証明論と呼ばれ、論理学・数学の中に独立した一つの分野を形成している。タルスキは形式的な意味論のパラダイムを確立して論理学のみならず後の言語学や言語哲学、数学の哲学にも決定的な影響を与えた。さらにオーストリアの数学者クルト・ゲーデルは古典一階述語論理が完全かつ健全な形式的体系を持つこと（これを古典一階述語論理の完全性と呼ぶ）を示した。

フレーゲ、ラッセルによる記号論理の創始から、ヒルベルトらによる洗練と発達、そしてゲーデルによる完全性の証明までは、思考の形式化と機械化に対する期待が最も高まった時期である。厳密な規則に従った形式的な操作によって論理学と数学における「正しい知識」のすべてが疑いの余地なく確立されるかに思えたのである。このことは西洋における合理主義の傾向の高まりと平行していた。合理主義とは正しい認識の獲得における理性の役割を強調する立場である。この時期の合理主義は記号論理学に代表される形式的な方法による正しい認識の獲得を重視していた。

上述のようにフレーゲとラッセルは数学のみならず、哲学にも彼らの論理学の成果を応用し、分析哲学の伝統を創始した。ラッセルの学生だったルートウィッヒ・ウィトゲンシュタインは、論理学によって扱えるものこそが私たちの思考の限界であり、そして世界の限界である、という極端なテーゼを掲げて、そこに収まらない宗教や道德などの形而上学的思弁を無意味なものとして退けた。フレーゲ、ラッセル、ウィトゲンシュタインらの思想はシュリッック、ノイラート、カルナップら、ウィーン学団の科学哲学者たちに影響を与え、論理実証主義／論理経験主義と呼ばれる運動へとつながった。

しかしこのような傾向は長くは続かなかった。1930年代以降、形式的な合理主義に対する否定的な反応が立て続けに現れたのである。1931年にゲーデルは、論理学と自然数論を含む任意の形式的体系について、もしそれが無矛盾ならばその体系では証明も反証も

*¹ このことは数学的に証明されているが、本書では証明は省略する。興味のある読者は例えばリチャード・ジェフリー『形式論理学』（産業図書）などを参照されたい。

$$\begin{aligned}
&\forall x \exists y F(x, y) \\
&\quad \neg G(a_0) \\
&\exists y F(a_0, y) \\
&\quad F(a_0, a_1) \\
&\exists y F(a_1, y) \\
&\quad F(a_1, a_2) \\
&\exists y F(a_2, y) \\
&\quad F(a_2, a_3) \\
&\exists y F(a_3, y) \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

図 3.4 無限に伸びるタブロー

できない数学的命題が存在することを証明したのである。これはゲーデルの第一不完全性定理と呼ばれている。さらにゲーデルはそのような命題の中にはその体系自体の無矛盾性を述べる命題が含まれている、ということを示した。すなわち形式的体系は無矛盾であっても、それ自身の無矛盾性を証明できないのである。これは第二不完全性定理と呼ばれている。形式的体系の限界を示す結果としては他に、タルスキによって示された真理の定義不可能性定理（1936 年）、チューリングによって示された停止問題の計算不可能性（1936 年）などが含まれる。なかでも本テキストに最も関係が深いのはチャーチによって示された古典一階述語論理の決定不可能性（1936 年）である。

上述したようにタブローの方法は古典一階述語論理に対して完全かつ健全なテストになっている。しかしこのことは、一階述語論理の言語で表現されたいかなる推論でも、タブローの方法を使えばそれが妥当であるか否かを知ることができる、ということを意味しない。というのもタブローが閉じない場合、常に有限の時間内で閉じないことが判明するとは限らないからである。このことは $\forall x \exists y F(x, y)$ から $G(a_0)$ への推論をチェックするタブローを考えてみれば分かる（図 3.4）。このタブローにおいては新しい定項が導入されると

第 4 章

誤謬

誤謬とは誤った推論に基づいた議論、あるいは不適切な議論である。詭弁と呼ばれることもある。誤謬には論理的誤謬と非論理的誤謬がある。論理的誤謬は、論理的に妥当な推論と似た形式を持つが、しかし妥当でない推論を用いる論証である。非論理的誤謬は不適切な論拠に基づく議論のことである。

誤謬は自分の主張を正当化するために使われるときはしばしば誤りである。しかしながら、経験則や科学的法則を発見する際には有用な推論である場合もある。この点については次節で扱う。

4.1 論理的誤謬

4.1.1 前件否定

仮言命題とその前件の否定から後件の否定を導く誤謬である。例えば次のように使われる。

テストの点数が 60 点以上ならば単位がもらえる。

テストの点数が 60 点以上でない。

単位がもらえない。

最初の前提で述べていることはテストの点数が 60 点以上であることが単位がもらえるための十分条件であるということであり、必要条件ということではない。単位をもらうにはテストで 60 点以上取る以外にも、毎回の授業に出席する、レポートを提出するなどの方法があるかもしれない。この推論が誤りであることは次の推論も同じ形式であることから明らかであろう。

雪が降るとバスが遅れる。

雪が降っていない。

バスは遅れない。

4.1.2 後件肯定

仮言命題とその後件の肯定から前件の肯定を導く推論である。例えば次のように使われる。

太郎が嘘をつくときは汗をかいている。

太郎は汗をかいている。

太郎は嘘をついている。

太郎が汗をかくのは嘘をつくときに限らない。運動をしたときにも汗をかくだろうし、単に暑い時にも汗をかくだろう。嘘をつくときに必ず汗をかくからといって、汗をかいていれば嘘をついていることは帰結しない。

4.1.3 過度の一般化

次の推論は妥当である。

ジョン、ポール、ジョージ、リングはリバプールの出身である。

ビートルズのメンバーはジョン、ポール、ジョージ、リングだけである。

ビートルズのメンバーはすべてリバプール出身である。

しかしながら次の推論は妥当ではない。

ジョン、ポール、ジョージ、リングはリバプールの出身である。

ジョン、ポール、ジョージ、リングはビートルズのメンバーである。

ビートルズのメンバーはすべてリバプール出身である。

一般に個別的な対象についての言明から一般言明を推論することはできない。このような誤謬を過度の一般化、あるいは性急な一般化という。ただし日常生活や科学においてはこのような推論は良く使われる。十分に吟味された一般化は、完全な正当化はされていないが、しかし有用な法則を提供しうるからである。過度の一般化や性急な一般化と言われるのは、十分な吟味を経ていない一般化を指す場合が多い。例えば次の推論は明らかに過度の一般化である。

ジャンはフランス人だ。

ジャンはワインが好きだ。

フランス人はみんなワインが好きだ。

4.1.4 媒介概念不周延の誤謬

媒介概念とは三段論法において大前提と小前提の両方に現れる概念である。三段論法において媒介概念が周延的であるというのは、小前提の主語を含み、大前提の述語に含まれるということである。媒介概念が周延的でないとき、推論は非妥当になる。例えば次のよ

うな推論である。

天才はすべて変人である。

太郎は変人である。

太郎は天才である。

4.1.5 選言肯定

選言と一方の選言肢の肯定から他方の否定を導く誤謬である。例えば次のように使われる。

$\sqrt{2}$ は有理数か無理数のどちらかだ。

$\sqrt{2}$ は無理数だ。

$\sqrt{2}$ は有理数ではない。

ただしこの推論は「有理数でありかつ無理数であるような数は存在しない」という暗黙の前提を付け加えると正しい推論になる。

4.2 非論理的誤謬

4.2.1 関連性の誤謬

当面の議論において無関係な論点を持ち出して、自分の議論の誤りをごまかしたり、相手の議論を混乱させたりすることである。これには相手の人格や能力の欠点を指摘する、感情に訴える、権威や人気に訴えるなどの方法がある。例えば「原爆がどれほど悲惨でむごたらしいものかを知っていれば、原爆が戦争終結を早めたなんて言えるはずがない」という文を考えよう。原爆の悲惨さやむごさは原爆が戦争終結を早めたかどうかという問題には無関係である。話者は原爆が戦争終結を早めたという理由で原爆投下を正当化する議論を阻止したいために、このような議論をしていると思われるが、しかしこの議論は有効ではない。原爆の使用には戦争の終結を早めたというメリットを上回るデメリットがあったということを論じるべきである。

4.2.2 誤った二分法

二つの選択肢を提示して、そのどちらかを受け入れなければならないように見せかけるが、実際にはその二つ以外にも選択肢があるものを言う。

例文 4.1. この英会話教室に通えば一日コーヒー一杯の値段で英語がしゃべれるようになるんですよ。あなたはこの教室に通って英語が喋れるようになるのと、一日コーヒー一杯のお金をけちって英語がしゃべれないままなのと、どちらを選ぶんですか？

話者は「この英会話教室にかよって英語が喋れるようになる」か「英会話教室に行かず

に英語がしゃべれないままである」かのどちらかであると言っているのだが、もちろんそれ以外の可能性もある。「英会話教室にかよって英語がしゃべれないままである」という可能性もあるし、「英会話教室に通わずに英語がしゃべれるようになる」という可能性もある。

この誤謬は両刀論法と併用されることもある。例えば次のように。

例文 4.2. 東京から大阪に引っ越したのだが、大阪人は僕が標準語を使うと気持ち悪いと言って嫌がるし、かといって下手な大阪弁を使うとそれはそれで嫌がる。結局どうしゃべったって嫌がられるのだ。

4.2.3 論点先取

根拠の中に主張が含まれているとき、それは論点先取の誤謬を犯している。例えば次のように。

例文 4.3. 自殺はいけないよ。自分の命は大切にしなければならないんだから。

4.2.4 媒介概念多義の誤謬、多義性の誤謬

三段論法において、大前提に現れている媒介概念と、小前提に現れている媒介概念が、異なる意味で使われていることをいう。例えば次の論証はその例である。

例文 4.4. 車を運転するには免許が必要だ。そして自転車は車の一種だ。従って自転車を運転するには免許が必要だ。

これは一見すると三段論法を使った正しい論証のように思われる。しかし最初の前提に使われている「車」は「自動車」を意味している一方で、二番目の前提に使われている「車」は「車輪を持つもの」を意味している。従ってこの論証は正しくない。

4.2.5 藁人形論法

これは論敵の主張を歪曲して攻撃する方法である。例えば次のように。

例文 4.5. 地球温暖化に対する対策を求める人々は、自分たちは経済成長の恩恵を享受しておいて、後進国にはいつまでも貧しいままでいるという身勝手な人間だ。

地球温暖化対策を求めている人間が後進国の経済成長だけを問題にしているとは限らない。先進国のライフスタイルをもっと二酸化炭素の消費を少ないものにすることを求めている人々、そして自分では低炭素排出のためのライフスタイルを実践している人々もいる。しかしこの論者は「後進国にだけ経済成長しないことを求めている」というように相手側の主張を歪曲して批判している。

問題 4.1. 以下の推論・論証はどのような誤謬の例になっているか。

(1) 学生たちは授業が難しすぎるとついていけなくなって寝てしまうし、授業が簡単すぎると今度は退屈になって寝てしまいます。学生というのはどうしたって寝るものですね。

(2) 日本でもイギリスでも人々は保守的で閉鎖的である。どうやら島国においては、人間は保守的で閉鎖的になるらしい。

(3) 原発に反対してる人間には、じゃあ電気なしでどうやって生活がしていけるのか教えてもらいたい。

(4) 高校生になったらもう大人だと言われるけど、大人だったら煙草を吸っても良いんだね。

(5) もしゲームをすることが脳の発達に悪影響を与えるならば、ゲームをする時間の長い児童は成績が悪い傾向にあるだろう。そして実際に調査の結果そのような傾向が見られた。従ってゲームをすることは脳の発達に悪影響を与えるのだ。

(6) 今回の震災において、被災者たちの秩序だった行動が素晴らしいと海外のメディアから称賛されたが、私はそうは思わない。彼らの行動は単に同調圧力が強いことの現れである。日本の社会では同調圧力が強いために、周りと異なる意見を主張したり、周りと異なる行動をとったりすることに対する心理的抵抗が大きい。そのために日本では傑出した指導者が出にくいのである。被災者たちが秩序だった行動をとるのも、周囲との「和」を乱さないようにするという、同調圧力の強さから来る行動であって、それゆえに称賛されるべきものではない。

(7) 人の性格というものは他人がその人の内に見出すものである。そしてそこには観察する人間自身の性格が反映される。たとえば A さんが Bさんをケチだと感じるのは、Aさんが欲しているものを Bさんが与えてくれないからだ。仮に Aさんが Bさんに何も求めていないのであれば Aさんは Bさんをケチだとは思わないだろう。つまり欲深い人間ほど、人の中にケチな性格を見出しやすいのである。このように人の性格というのは、その人の内在的な性質ではなく、あくまでも他人との関係の中で現れてくるものなのである。

(8) このたびノーベル賞を受賞した〇〇教授について、「〇〇教授は挫折もたくさん経験していてエリートにありがちな嫌味がない」というようなコメントをよく耳にしたが、挫折の経験とセットでなければノーベル賞受賞者を称賛することもできない精神こそ嫌味というのではないか。

第5章

論証

例えば誰かが「髪の毛を伸ばすと痩せる」と言ったとして、あなたはおそらくこの主張を信じないだろう。けれども例えば髪の毛の長い人のほうが体重が低い傾向にあることを示す統計的なデータを提示されたり、あるいは髪の毛の長い人と短い人では日常的な作業によって消費するカロリーに違いがあると言われたり、あるいは髪を伸ばして実際に体重が減ったことがあると言われたりしたら、ひょっとしたらあなたはこの主張を信じるかもしれない*¹。このように根拠を挙げて主張を説得的に述べることを論証という。論証は、他人に向けて自分の主張を説得するために、つまり自分の主張を相手に信じて受け入れてもらうために、行なわれる。

与えられた論証がどの程度説得力があるかを判断することはクリティカル・シンキングの重要な部分である。私たちはしばしば自分が信じたいことを主張している論証を信じ、自分が信じたくないことを主張している論証を斥ける傾向にある。しかし感情や直感に従って、十分な吟味をせずに他人の主張を受け入れる（あるいは斥ける）ことは望ましい態度ではない。もちろんあらゆる場合に十分な吟味が必要なわけではないし、またそれが可能なわけでもない。例えばあなたが学校に行くために家を出ようとしているときに、あなたの家族が「天気予報で雨が降るって言っていたから傘を持って行った方が良いよ」と言ったとする。この主張を吟味するためには、多くの時間と労力が必要である。本当に天気予報で雨が降ると言ったのか、それはどこの局の天気予報だったのか、その局の天気予報はどのくらい信頼できるのか、何%の確率で雨が降ると言ったのか、何時から何時の間に雨が降るのか、その雨はどのくらい強いのか、などなどを調べないといけない。そしてこの主張にはこれほどのコストをかけて吟味する価値はないだろう。それどころかそのようなコストをかけることは却って損である。というのもこの主張を吟味していたらあなたは学校に遅刻するし、また教えてくれた家族の不興を買うに違いない。一方でこの主張を吟味せずに受け入れたとして、あなたが支払うコストはただ傘を持って歩く労力だけである。

与えられた論証を十分に吟味する必要があるかどうかを判断することも重要な論理的思

*¹ 「髪の毛を伸ばすと痩せる」というのは適当に考えた例であり、実際には根拠はない。

考の能力である*²。しかしこのテキストではそのことについては触れない。ここでは与えられた論証を評価する練習と、論証を組み立てる練習を行う。

5.1 論証の評価

論証の評価は以下のステップに従って行われる。

1. 論証の構造を分析し、テーマ、メインの主張とその根拠を特定する。
2. 根拠がどれだけ確かであるかを評価する。
3. 根拠から主張への推論の蓋然性を評価する。
4. 論証全体を評価する。

これらのステップについて、次の例文を取り上げて順に説明しよう。

例文 5.1. 科学技術は私たちから病気や飢えなどの脅威を取り除くばかりでなく、私たちの生活を便利に、快適にしてきた。疑いなく科学技術の進歩は人類にとって望ましいことである。ところで人類史を眺めるならば、科学技術が最も急速に発展するのは、しばしば戦争や侵略によってである。従って戦争が望ましいということも私たちは認めざるを得ない。

5.1.1 論証の構造を分析する

論証の構造を分析するというのは、その論証において個々の文がどのような役割を担っているか、個々の文が他の文に対してどのような関係に立っているかということを明らかにすることである。論証の中での文の役割には色々あるが、最も重要なのは主張と根拠である。

主張とはその論証で筆者が読者に伝達したい最も重要な情報・意見であって、これを読者（聞き手）に受け入れさせるのがその論証の目的になる。根拠とは主張をサポートして、説得力を高めるために提示されるものである。主張と根拠の関係は接続詞によって表わされることが多い。「したがって」、「それゆえに」などはその前に根拠、その後に主張が置かれる接続詞である。逆に「なぜならば」、「というのも」などはその前に主張、その後ろに根拠が置かれる接続詞である。しかし主張と根拠が常にこのような明示的な仕方で提示されるわけではない。その場合には文脈によってどれが筆者の一番伝えたい主張であるかを読み取る必要がある。

また論証には明らかに述べられていない暗黙の前提が含まれている場合があるので、その時にはそれを明らかにすることも重要である*³。

さて例文 5.1 について考えよう。この文章には以下の言明が含まれている。

*² 科学哲学者の伊勢田哲治はこれを「メタ・クリティカル・シンキング」と呼ぶ。

*³ 暗黙の前提については 5.2 節で扱う。

1. 科学技術は私たちから病気や飢えなどの脅威を取り除き、私たちの生活を便利で快適にしてきた。
2. 科学技術の進歩は人類にとって望ましい。
3. 戦争は科学技術を発展させる。
4. 戦争は望ましい。

このうちメインの主張は4である。これは「従って」という接続詞によって明らかにされている。4の主張をサポートする根拠は直接的には2と3である。また2をサポートしている根拠が1になっている。1から2を導き出す際には

0. 病気や飢えなどの脅威がなく、生活が便利で快適であることは望ましい

という暗黙の前提があることに注意しよう。すなわちここでの論証の構造を図示すると

$$\frac{\frac{0}{2} \quad 1}{3} \quad 4$$

となっている。

5.1.2 根拠の確かさを評価する

論証の構造を明らかにしたら、次はその論証の根拠の確かさを吟味する。科学的事実、歴史的事実、一般に受け入れられている事柄、信頼できる人物の証言、権威のある情報源からの引用などは確実性の高い根拠になる。しかしどれだけ確実性が高いように思われることでも絶対に正しいとは限らない。そのためここではあなたは自分の直感や習慣的な判断に頼らざるを得ない。それでも少なくともあなたがある論証の根拠を受け入れるときには、それをうけいれた理由を説明できることが望ましい。

例文 5.1 において、根拠として挙げられているのは0、1、3である。1は客観的な事実として認められるだろう。かつては防ぎようがなく致命的だった病気の多くが、医学や衛生の進歩によって取り除かれている。また農業や運輸の進歩によって現在は多くの人々が飢えとは無縁の生活を送ることができるようになった。工業技術の進歩によって私たちは辛く危険な労働から解放された。などなど。3についてはどうだろうか。科学技術が戦争によって進歩した例は確かに存在する。例えば原子力やコンピュータ、潜水艦や飛行機などがその例である。すべての科学技術の発達に戦争のおかげという訳ではないが、しかし戦争がある種の科学技術の発達を促進したことは事実である。また暗黙の前提となっている0は多くの人が認めるところであろう。したがってこの論証の根拠はおおむね正しいと思われる。

5.1.3 推論の蓋然性を評価する

推論の蓋然性とは、その前提のすべてが正しい時に、どれだけの確かさで結論が導けるか、ということである。1 節で述べたように、前提のすべてが正しいときには結論も必ず正しいような推論、すなわち反例が存在しない推論を必然的推論と呼ぶ。理想的には論証において用いられる推論は必然的であることが望ましい。しかしすべての論証において推論の必然性を求めるのは明らかに強すぎる要求である。通常私たちは反例がどれだけ容易に見つかるかということで推論の蓋然性を評価し、反例が減多に見つからないようであれば、その推論を受け入れている。例えば誰かが「僕と君が初めてあったのは春だったよ。桜が咲いていたからね」と言ったとしよう。桜が咲いていたということから春だったということは必然的には帰結しない。冬に桜が咲くこともあるからである。しかしそのようなケースは非常にまれであるために、私たちは通常この推論を正しいものとして受け入れる。

例文 5.1 において使われている推論はどうだろうか。ここでは 0 と 1 から 2 を、2 と 3 から 4 を導くという二つの推論が使われている。しかしこれらはどちらも

A は B をもたらす。

B は望ましい。

A は望ましい。

という形式の推論である。この推論は必然的ではなく、その蓋然性もそれほど高くはない。次の推論を考えよう。

私の歯痛を和らげることは望ましい。

モルヒネを注射することは私の歯痛を取り除く。

モルヒネを注射することは望ましい。

モルヒネを摂取することは、歯痛を和らげるという良い影響だけではなく、悪い影響もある。その悪い影響が良い影響を上回っているかもしれない。従ってこの推論を無条件に受け入れることはできない。私たちは A が望ましい結果 B をもたらすからといって、ただちに A が望ましいとは結論できないのである。A がもたらす望ましくない結果についても考えなければならない。例文 5.1 における 0 と 1 から 2、2 と 3 から 4 への推論についても同様である。私たちは科学技術の発達をもたらすマイナスの影響、戦争がもたらすマイナス影響についても考えなければならない。戦争は明らかに非常に大きな悪影響をもたらす。その影響は科学技術を発展させるという良い影響を上回るかもしれない。

5.1.4 論証全体を評価する

論証全体の説得力は、根拠の確実性と推論の蓋然性の「積」として考えられる。もしも根拠の確実性と推論の蓋然性のどちらかでも 0 であれば、他方がどれほど高くても論証全

体の説得力は 0 である。根拠の確実性と推論の蓋然性がどちらも 1 であれば論証全体の説得力は 1 である。

例文 5.1 全体を評価すると、根拠はそれなりに受け入れられるが、推論の蓋然性は低い。そして実際、戦争が望ましくない様々な結果をもたらしていることを考えれば、この論証の結論は受け入れがたいであろう。

問題 5.1. 以下の論証の構造を明らかにして、評価しなさい。

(1) 民主国家たる日本がいまだに死刑などという野蛮な制度を持ち続けているのは嘆かわしいことだ。基本的人権の尊重は民主主義の根本原理の一つであるが、人命を奪うことが最大の人権侵害であることは間違いがない。さらに言えば殺人犯が動機として「死刑にして欲しかった」などと述べることもあり、死刑が犯罪を抑止するということもない。だいたい現在、先進国で死刑を行っているのは日本とアメリカぐらいのものなのだ。

(2) 私が「知能的なロボットの研究をしている」というと、たまに「ターミネーター」のようなものを想像して、「危険はないのですか？」と質問してくる人がいます。ああいった話はあくまでもフィクションです。ですから、現実にはロボットが人間を支配するなどということは起こりません。

(3) 最近の若者と話していると、彼らのコミュニケーション能力の低さに驚かされる。この原因の一つはやはりインターネットの普及だろう。インターネットは相手と直接会話することなく情報のやり取りをする機会を増大させた。しかし人間は声音や表情、身振りといったものによっても多くの情報をやり取りしているのである。このような非言語的な情報伝達の作法はインターネットでは身に付けることが出来ない。デジタル世代が社会の中心的なメンバーとなったとき、日本はどうなっているのだろうか。

(4) 世界一のスーパーコンピューターの開発を目指すプロジェクトに関して、ある議員が「二位では駄目なんですか？」と言って、多くの科学者・工学者たちの不興を買った。当然だろう。科学においては二番目以降は等しく無価値である。そもそも世界で二番目のスーパーコンピューターをどこの国が好んで買ってくれるというのか。科学の観点からも経済の観点からも、二位では駄目なのだ。

(5) 肉食主義などというのは生命の本質をまったく理解していない、不合理なセンチメンタリズムである。動物が他の生命を糧にして生きるのは自然の摂理であって、私たちは他の生物の生命を奪わなくては少しの間も生きていけないのだ。そして命にはすべて等しく価値があり、奪ってよい命と奪って悪い命の区別などはない。植物は食べても良いが動物は食べてはいけないというのは根拠のない差別である。

5.2 暗黙の前提

論証にはしばしば明示的に述べられていない前提が含まれている。これを暗黙の前提と呼ぶ。暗黙の前提が含まれていること自体は悪いことではない。すべての前提を明示していたのでは文章が冗長になりすぎるからだ。話し手と聞き手（あるいは著者と読者）の間で共有されていると思われる認識については、いちいち論証中で述べる必要はない。しかしどのような認識が共有されているかということについては意識しなければならない場合がある。自分にとってはごく当然と思われることが相手にはそうではないかもしれない。そしてコミュニケーションの失敗の多くはこのような認識のずれに起因する。例えば「君はまだ18歳だろう。煙草なんか吸ったらだめじゃないか」という発言には「20歳未満の人は喫煙してはいけない」および「18歳は20歳未満である」という二つの暗黙の前提がある。これらは私たちにとってごく当たり前に思われるが、しかし喫煙に関する年齢制限のない国の出身者にとってはこの議論は理解できない可能性がある。

形式的には、暗黙の前提とはその論証に付け加えることによって、その主張を導く推論が根拠と暗黙の前提からの演繹的な推論（あるいはかなり蓋然性の高い推論）になるようなものである。上の例でいえば

君は18歳だ。	
君は喫煙してはいけない。	

は演繹的な推論ではない。しかしこれに暗黙の前提を加えた

20歳未満の人は喫煙をしてはいけない。	
18歳は20歳未満だ。	
君は18歳だ。	
君は喫煙をしてはいけない。	

は演繹的な推論になる。

問題 5.2. 以下の論証において暗黙に前提されていることを指摘しなさい（いくつでも）。

(1) 民主主義の根幹をなすのが選挙制度であるといっても過言ではない。近代の市民たちは時に命を賭して民主的な選挙制度を勝ち取ってきた。日本で男子普通選挙が実現してから一世紀近くたつが、現代の私たちはこの制度のありがたさを忘れてはいないだろうか。国民の意思を反映する機構としての選挙制度が適切に機能しなければ、民主主義社会そのものが崩壊してしまう。それゆえ私たち国民は、選挙に参加し一票を投じることで自らの意思を表明しなければならないのである。

(2) 現代の環境汚染の多くは企業の活動によって引き起こされている。そこで環境を汚染するような企業の活動をより厳しい法律によって規制するべきだという意見がある。しかしこれは自由市場の原理に反するため望ましくない。では他にどのような方法が考えら

れるだろうか？ 企業は利益を追求して活動するのであるから、汚染を出すことが企業の利益の減少につながるような制度を設ければ良い。そのためには、企業の活動によって生じた環境の価値の損失に応じた金額の税を企業に課することが有用であろう。

問題 5.3. 次の文章を読み、問に答えなさい。

現在は以前に比べて、高等教育を受ける女性の割合が増加している。そして高い教育を受けている女性ほど晩婚であり、生む子供の人数も少ない傾向がある。したがって将来の世代においては教育程度のより低い女性の子供が人口のより多くを占めることになるだろう。これでは国民の知的能力水準は低下する一方になってしまふ。高学歴の女性が子供を産む際には何らかの優遇措置を施すような制度が望まれる。

(1) この論証において暗黙に前提されていることを挙げなさい。答えはいくつ書いても良い。

(2) この論証を評価して、これに反対する論証を書きなさい。

5.3 分かりやすい文章、分かりにくい文章

論証を相手に受け入れてもらうためには正しいだけでは十分ではない。まずその論証で主張されていること、その根拠として提示されていることを相手に理解してもらわなければ、相手に正當に評価してもらえない。従って論証を書く際には、分かりやすく書くことも重要である。この節では文章を分かりやすく書くために注意すべき点を説明する。

一般に文章には自分の意見・主張を述べるものと、自分の意見ではなく客観的な事実を述べる者がある。前者を論説文、後者を報告文と呼ぶことにする。本章で扱ってきたのは主に論説文であるが、本節と次節ではこれらの両方を扱う。

論説文でも報告文でも、文章を分かりやすくするには以下の点に注意することが有用である。

- 論証の構造を明確にする。
- 必要な情報を正確に漏らさず伝える。
- 曖昧な表現、不明瞭な表現を避ける。
- 一文、一段落を長くしすぎない。

例を挙げながら、これらについて説明しよう。

5.3.1 論証の構造を明確にする

次の例文を読んで、一番筆者が伝えたい情報が何であることを考えてみよう。

例文 5.2. 裁判は厳密に法に則って行われることが民主主義の大原則である。私たちは民主主義社会に生きる一員として、この原則を大切にしなければならない。一方、この原則は法体系が複雑化した現在、裁判が少数の専門家によって独占されるという結果をもたらした。そのために裁判が一般市民の感覚からずれている、ということが近年、しばしば指摘されてきた。このような現況を打開するために日本では 2009 年から、一般市民から選ばれた裁判員が、殺人などの重大な刑事事件の審議に加わり、量刑に関して裁判官とともに合議を行うという、裁判員制度が導入されている。

この文章にはいくつかの点で分かりにくいところがあるが、一番の問題は筆者が一番伝えたいことが何なのかが分かりにくいということである*4。おそらく「裁判員制度が導入されている」という情報を一番に伝えたいのだろうが、しかしこの文章ではそのことが伝わりにくい。

論説文の目的は自分の考えを相手に納得して受け入れてもらうことである。そのためにはまず自分の考えが何であるかをはっきり相手に伝えなければならない。また報告文ではある事実に関する情報を相手に伝えることである。どちらの文章にしても、一番伝えたいことが何かを際立たせなければ、その文章を書く目的が達せられない可能性が高い。伝えたいことを際立たせる一つの方法は、これが重要な情報なのだということを示す目印（マーカー）を付けることである。マーカーとは「したがって」「なぜならば」等といった、文と文の関係を表わす接続詞、あるいは「……ということが重要である」、「私は……と主張する」等の文修飾表現である。もう一つの方法は、文の配置の仕方を工夫することである。

上の文章では、一番伝えたいことが最後に出てきている。一番重要な主張や情報をあえてばかしたり、最後の最後までとっておいたりすることもある種のレトリックとして有効な場合もある。しかしながら文章の読みやすさという点から考えると、このような書き方はお薦めできない。またこの文章では途中で「この原則を大切にしなければならない」という言葉が出てきていることにも注意したい。「……しなければならない」とか「……すべきである」という表現は一般に重要な主張を表わすマーカーとして使われることが多い。そのため読者にこの一文が一番伝えたいことなのかと誤解させる恐れがある。また最後の一文がやや長すぎることも問題である。以上の点を考慮して次のように書きなおしてみよう。

例文 5.3. 日本では 2009 年から裁判員制度が導入されている。これは一般市民から選ばれた裁判員が、殺人などの重大な刑事事件の審議に加わり、量刑に関して裁判官とともに合議するというものである。

この制度が導入された背景には、近年、裁判が一般市民の感覚からずれているという指摘がしばしばなされてきた、ということがある。裁判は厳密に法に則って行われることが

*4 この文章は著者（久木田）が適当に書いたものだが、実際に神戸大学での授業で、この文章を学生に読ませて「筆者が一番伝えたいのは何か」と質問すると、いくつかの異なる答えが返ってきた。

民主主義の大原則である。しかしこのことは、法体系が複雑化した現在、裁判が少数の専門家によって独占されるという結果をもたらしている。そこでこの現況を打開するために裁判員制度が導入されたのである。

上の例文に比べるとだいぶ明快になっているのが分かるだろう。

5.3.2 必要な情報を正確に漏らさず伝える

文章を書くときは5W1Hを意識することが重要だとよく言われる。これはつまり、ある出来事について報告をする際には、その出来事に関わった主体（who）、起こったこと（what）、時（when）と場所（when）、それが起こった理由（why）、そしてそれが起こった経緯（how）を述べるのが重要だということである。もちろんいかなる報告においてもこれらのすべてを書かなければならないという訳ではない。報告を読む相手に関心を持っていると思われることがただを書けば良いのである。例えば「運転免許持っているか」と聞かれて、「はい、私は22歳の時に京都で取得し、28歳の書き換え以来ゴールド免許になっている、普通自動車の運転免許を現在、財布の中に携帯しています。なぜならば外出先で運転する必要ができたときや、身元を証明しなければならない時などに、運転免許を持っていないで困ることがあるので、常に運転免許を携帯するようにしているからです」と答えることは明らかに不適切である。また文脈から明らかなことをわざわざ述べる必要はない。冗長な報告はそれはそれで読みにくいものである。どの程度がちょうどよいのかということは経験を積んで学習するほかはないのだが、それまでは5W1Hも一つの指針にはなりうる。

論説文において特に重要なのは、理由が適切に述べられているかどうかである。私たちは自分が当たり前だと思っていることを書かないで済ますことが多い。しかし読者が必ずしも自分と同じ知識や信念を共有しているわけではない。自分の持っている常識が読者にとっても常識であるかどうかを考えてみることで、より分かりやすい文章を書くことができる。

5.3.3 曖昧な表現を避ける

曖昧な表現とは、多様な解釈の可能性がある表現のことである。これには語彙レベルの曖昧さと、文法レベルの曖昧さと、文脈レベルの曖昧さがある。

語彙レベルの曖昧さとは、一つの語句が異なる複数の意味で解釈される可能性を持つとき、あるいは語が表わす概念の境界が明確でない時に生じる。例えば「写真をとってください」という文は、写真を撮影することを頼んでいるとも、すでに撮影され現像された写真を手渡すように頼んでいるともとれる。これは前者の曖昧さの例である。また「青少年にとって有害な図書は厳しく取り締まるべきだ」という文においては、「青少年にとって有害」という概念がどのようなものに当てはまるのかが漠然としている。これは後者の曖昧さの例である。

文法レベルの曖昧さは一つの文が異なる文法的構造を持つものとして解釈されうる時に生じる。たとえば「暗殺された J・F・ケネディの妻は、銃撃の瞬間、ケネディの隣に座っていた」という文において「暗殺された」が「J・F・ケネディ」にかかるようにも、「J・F・ケネディの妻」にかかるようにも読める。このような曖昧さを完全に避けることは難しいが、できるだけ誤解の余地のないような書き方を心がけることは重要である。たとえばこの文であれば、「J・F・ケネディが銃で暗殺された瞬間、彼の妻は彼の隣りに座っていた」と書けば誤解の余地はない。

文脈レベルの曖昧さとは、文が発せられた文脈や状況に依存して生じる曖昧さである。例えば「ジョンがポールと出会ったとき、彼は美術学校に通う学生だった」という文では「彼」がジョンを指すのかポールを指すのかが曖昧である。

5.3.4 一文、一段落を長くしすぎない

文や段落が長すぎるのも文章を読みにくくする原因になる。適度な長さで切るようにしよう。また一段落には一つのトピックというのが文章の基本的な作法である。

問題 5.4. 以下の文章の分かりにくい点を指摘し、分かりやすく書きなおしなさい。

(1) 裁判は厳密に法に則って行われることが民主主義の大原則である。私たちは民主主義社会に生きる一員として、この原則を大切にしなければならない。しかし、この原則は法体系が複雑化した現在、裁判が少数の専門家によって独占されるという結果をもたらした。そのために裁判が一般市民の感覚からずれている、ということが近年、しばしば指摘されてきた。このような現況を打開するために 2009 年から、一般市民から選ばれた裁判員が、殺人などの重大な刑事事件の審議に加わり、量刑に関して裁判官とともに合議を行うという、裁判員制度が導入されている。

(2) 病院に来る患者の中には、「お客様意識」が強いというか、病気の治療に関しては医者が全責任を負うべきだ、と考えている人が少なくない。「こっちは金を払うんだから、病気はそっちが治せ」というわけである。多くの病気は、その人の生活習慣によって引き起こされる。糖尿病は多くの場合、食生活が原因で起こる。そのような病気に対して医者が出来ることは限られていて、せいぜい対症的な治療だけだ。病気の治療には患者自身の努力が不可欠である。

(3) 現在、OS などのソフトウェアのプログラムは非常に複雑で巨大なものになっているので、何か問題が発見されたときに、そのプログラムを最初から見直して問題の個所を除去するというような、根本的で論理的な解決よりも、「工学的」な解決が好まれる。

問題 5.5. 以下の文章を読み、問に答えなさい。

ミステリー小説は、しばしば、その最大の謎がどこにあるかということに従って、犯

人が誰かということが謎解きの焦点になっている「フーダニット」、犯行の手段が焦点になっている「ハウダニット」、犯行の動機が最大の焦点になっている「ホワイダニット」という仕方で、分類される。『刑事コロンボ』シリーズのように、犯人も動機も手段も、すべて知られていて、刑事がそれをいかにして見破るかというところが焦点になっているミステリーもある。これはいわばメタのハウダニット・ミステリーである。またルース・レンデルの『ロウフィールド館の惨劇』では、やはり犯人も動機も最初に提示されているのだが、非常に特殊なものであるため、なぜ殺人の動機たりえたのかという点が最大の謎になっています。読者は、犯人の人物像と被害者たちとの関わりの克明な描写を読み進めるうちにその謎に迫っていくことになる。したがってこれはメタのホワイダニット・ミステリーである。ミステリーの王道はフーダニットとハウダニットである。エラリー・クイーンなどの作品においてしばしば、ストーリーの途中で作者から読者への挑戦がなされるが、大抵「読者は犯人が誰で、どのように犯行を行なったかを当てて欲しい」というものである。ここで犯行の動機が問われることはない。純粋なミステリーでは動機を謎の中核に持ってくることは比較的稀である。犯人が誰か、犯行がどのように行なわれたか、ということには論理的・物理的な制約がある一方で、人間の心理は、物理学にも論理学にも逆らうことが可能である。したがって作者は原理的にはどれだけ奇抜な動機を持ち出すこともできる。しかし奇抜な動機を無理に考え出そうとすると、謎の秘密組織の掟とか、古くから伝わる村の因習とか、ほとんど何でもありになってしまう。問題は、動機が奇抜であればあるほど、そこに説得力を持たせるためには、作者の人間を描く筆力が要求される。

久木田水生、「フィクションの中のロボット——ホワイダニットのジレンマとロボット工学の三原則」（『PROSPECTUS』、第8号）を問題用に改変

1. この文章を二つの段落に分けるとすれば、どこで区切るのが最も適当か。
2. この文章に一か所「なぜならば」を挿入するとすればどこが適当か。
3. この文章の読みにくい箇所、不適切な箇所を訂正しなさい。

5.4 エッセイの形式

エッセイ（レポート）においては決まった形式に従って書くことが重要である。エッセイは大きくいって序論、本論、結語からなる。

序論の役割は背景の説明、問題の提起、エッセイ全体の主張の要約、そのエッセイの重要性を読者に伝えることにある。読者は序文を読んでその論文が自分にとって有用かどうかを判断する。従って良い序文を付けることは、そのエッセイを読んでもくれる読者を増やすことになる。

本論の役割は、自分のメインの主張を詳細に述べることである。本論では、既知の情報を提示する、その情報のソースを明らかにする（先行研究の紹介、文献の参照等）、新しい情報を提示する、その情報がどのように得られたかを明らかにする、などのことが行われる。情報のソースは基本的に読者が利用可能なもの、アクセスできるものでなければな

らない。情報のソースは説明責任を果たせるものでなければならない。

結語では、本論の主張を繰り返し、その重要性をもう一度アピールする。また将来の研究の方向性を示唆したり、類似の研究を紹介したりすることもある。

問題 5.6. 次の文章を読み、問に答えなさい。

経済効率を高めるためには、貧富の格差が拡大するのはやむをえないという考え方は、「効率性と公平性のトレードオフ」と言い換えることができます。「トレードオフ」とは、A と B が同時に成り立つことはなく、どちらか一方を優先する際には、他方を犠牲にしなければならない、ということです。従って効率性のためには公平性が犠牲になっても仕方がない、さらに言えば、公平性を犠牲にしなければ、効率性は高まらないという考え方です。

果たして効率性と公平性の間には「トレードオフ」の関係が成立しているのでしょうか。すなわち、格差の拡大を容認しなければ、あるいは、公平性を犠牲にしなければ、経済効率を高めることは出来ないと言えるのでしょうか。経済学者としては、検証する必要があります。

たとえば、有能な人、頑張った人に、高い報酬を与えることを考えて見ましょう。かつては有能な人が高い報酬を得ても、所得再分配政策によって、高額のを課されていました。そのことによって有能な人のやる気を削ぎ、経済効率が低下し、社会が活性化されない、というのがトレードオフの考え方です。では仮に二〇〇〇万円の所得をもらっていた人が二倍の所得の四〇〇〇万円、あるいは五倍の一億円の所得をもらったとします。そうしたときに、はたして、経済の効率あるいは、努力の程度もそれに比例して高まるのでしょうか。

私は、そうはならないと判断しています。これは「収穫逨減の法則」という考え方で説明できます。ある要素を倍増したときに、それに比例して、それから期待できる効果も倍増するのか。三倍になった場合はどうか。四倍になった場合はどうか。このように、どんどん、その要素を高めれば高めるほど、その期待できる効果は逨減するというのが経済学の考え方です。すなわち、有能な人に高い所得を与えたとしても、それから得られる経済効率への効果というものには、ある程度の限度があるだろう、ということです。

もう一つ、別の見方をして見ましょう。すなわち、有能な人、頑張る人が今まで以上に高い所得を得たときに、どういう現象が起きるかということを考えて見ます。

所得が高くなると、生活のレベルも上がります。一億円の所得を得ている人は、それに見合った生活をするようになるでしょう。その生活を維持するには、高い消費が必要です。エネルギー資源もたくさん使わなければなりません。しかし、天然の資源やエネルギー資源には、限度があります。それが、限られた少数の人の生活のために、大量に消費されるということは、社会にとって、さらにいえば人類にとってはマイナスにもなりえるのです。

以上のように見てくると、公平性を犠牲にすることが、必ずしも効率性を高めるとは言

えません。むしろ、私は、効率性と公平性は、両立が可能であると考えます。

(橘木俊詔、『格差社会——何が問題なのか』、岩波新書、2006)

1. この文章が書かれた背景を説明しなさい。(50 字以内)。
2. この文章で提起されている問題は何か、書きなさい。(40 字以内)
3. それに対する筆者の意見を簡潔に書きなさい。(40 字以内)
4. 筆者がそのように考える理由を二つ書きなさい。(各 60 字以内)
5. この文章を論証として評価しなさい。(字数自由)

第 6 章

非演繹的推論

6.1 様々な推論

論理学においては、推論が正しいとされるのはそれが妥当あるいは演繹的な場合である。しかし私たちは常に演繹的な推論ばかりを使っている訳ではない。それどころか私たちが持っている有用な信念のほとんどは演繹的でない推論によって獲得される。そのような非演繹的な推論の代表的なものが類推 (analogy)、帰納 (induction)、仮説形成 (abduction) である。

類推とはある種の対象 A について成り立つことを別な対象 B についても成り立つと推論することであり、「外挿 extrapolation」とも呼ばれる。例えばダイオキシンがラットに有害であることから人間にとっても有害だろうと推論するのが類推の例である。対象 A から対象 B への類推をする際には A と B の間に類推される性質に関連する点で類似性があることが必要である。例えばラットにダイオキシンが有害であるからといって自動車にとっても有害であると類推することは明らかに不適切である。

帰納とはいくつかの個別事例から一般法則を推論することである。たとえばあなたの知っているフランス人がワイン好きであることから、「フランス人はみんなワインが好きだ」という結論を導くとき、あなたは帰納を行っている。ただし「帰納」という言葉は非演繹的推論一般を指すこともあるし、あるいは観察や実験による理論の検証プロセスを指すこともある。

仮説形成とは、ある観察された事実を説明する仮説を立てることである。ここで仮説が観察を説明するというのは、既に受け入れられている理論（知識あるいは信念の体系）にその仮説を加えて拡張された理論からはその観察が演繹的に導ける、ということである。たとえばある人物（ギュスターヴとしよう）がワインを好んでいることが観察されたとしよう。またあなたは「フランス人はみんなワインが好きだ」と信じているとしよう。このとき「ギュスターヴはフランス人だ」という仮説を立てると、ギュスターヴがワインを好んでいることはあなたの信念と仮説から演繹的に導かれる。従ってこの仮説は観察された事実を説明する。もちろんある事実を説明する仮説は一つとは限らない。たとえばあなたが「イタリア人はみんなワインが好きだ」という信念をもっていれば「ギュスターヴはイ

タリア人だ」という仮説によってもギュスターヴがワインを好んでいることは説明される。しかし「ギュスターヴ」という名前がフランス人によくある名前である一方で、イタリア人には一般的ではないという知識に照らせば、前者の方が後者よりも良い仮説である。仮説がどれだけ良いかは、他の背景知識との整合性などの基準によって評価される。通常、仮説形成はいくつかの可能な仮説を比較して最善のものを選ぶというプロセスを含むため、「最善の説明への推論」とも呼ばれる*1。

三段論法の図式に従って演繹、帰納、仮説形成について説明しよう。次の三つの命題を考える。

- (1) フランス人はみんなワインが好きだ。
- (2) ギュスターヴはフランス人だ。
- (3) ギュスターヴはワインが好きだ。

(1)(2) から (3) を導くのは三段論法の一つであり、演繹である。また (2)(3) から (1) を導くのは個別的な事例からの一般化であり、帰納である。(1)(3) から (2) を導くのは理論 (1) と観察 (3) から仮説 (2) を導く推論であり、仮説形成である。

類推や帰納、仮説形成は「演繹的」という意味での「正しい」推論ではなく、従って誤謬と見なされることもある。たとえば上の例での帰納はたった一個の事例からの一般化であり、「性急な一般化」の誤謬を犯していると批判されるかもしれない。また仮説形成は「後件肯定」と呼ばれる誤謬推論の一種である。確かにもしも論証において結論の正しさを支持するためにこれらの推論形式が援用されているのだとすれば、それは誤謬として退けられなければならない。しかし多くの場合、私たちがこれらの推論を用いるのは、結論の正しさを論証するためではなく、有用な行動の指針となる仮説を得るためである。たとえばギュスターヴがワインを好んでいることを観察し、これを説明するために「ギュスターヴはフランス人だ」という仮説を立てたとしよう（この仮説を H とする）。するとあなたはギュスターヴと接する際に、フランス人についてあなたが持っている様々な信念を利用することができる。たとえば「フランス人はみんなフランス語を話す」という信念（これを B とする）と仮説 H から、「ギュスターヴはフランス語を話す」という予測（これを P とする）が導かれる。その予測に基づきあなたはギュスターヴにフランス語であいさつをするかもしれない。ギュスターヴがフランス語を話せば、このことであなたはより効果的に彼とコミュニケーションができるかもしれない。そしてこの予測 P の成功によって仮説 H はその確からしさを増すであろう。一方もしギュスターヴがフランス語を話さなければ（したがって予測 P が誤りであれば）、あなたは仮説 H か信念 B のどちらかを改めなければならない。というのも P は、H と B からの演繹的帰結であり、したがって H と B がともに正しいとすれば P も正しくなければならないからである。

このように演繹的推論と非演繹的推論は、私たちのダイナミックな認識活動において異なる役割を持っている。私たちは観察された事実から類推や帰納、仮説形成によって、何

*1 サミール・オカーシャ著、廣瀬覚訳（2008）、『一冊で分かる 科学哲学』、岩波書店。

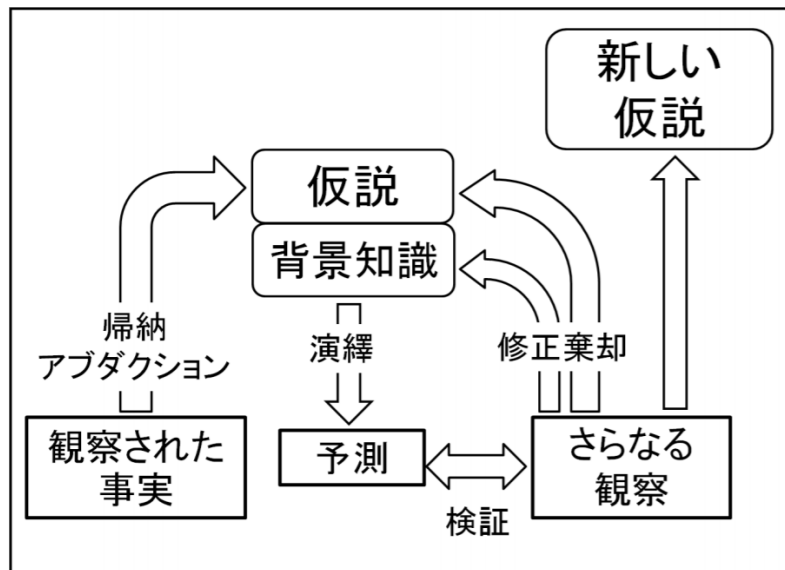


図 6.1 認識活動のダイナミズム

らかの仮説を立てる。そしてその仮説と既に持っている信念から演繹的に予測を導き出す。その予測がさらなる観察事実と合致していれば、私たちはその仮説をより確かなものと見なす。逆に予測に合致しない事実が観察されれば、私たちはその仮説（あるいは信念のどれか）を誤りとして棄却する。こうして私たちはより良い信念体系を構築していくのである。

6.2 帰納と類推の評価

非演繹的な推論を使った論証は、正しいという保証が与えられていない。それはあくまでも蓋然的なものである。しかしだからといってそのような論証のすべてを誤りとして斥けることも現実的ではない。私たちは日常生活や科学が依拠している信念のほとんどは非演繹的な推論によって形成されたものである。もし非演繹的推論に基づいた論証のすべてを斥けるならば、私たちはすべての科学理論も疑わなければならない。それでは非演繹的な推論に依拠した論証を評価するにはどのような基準に基づいたら良いのだろうか。

帰納と類推は類似した推論の構造を持っている。帰納はある対象のクラスの一部に共通に観察された性質を、そのクラスの全体について成り立つと推論することである。類推はある対象のクラスに共通に観察された性質を、別の対象のクラスについても成り立つものと推論することである。つまりこれらはどちらも次のような形式の推論である。

クラス A に性質 P が共通して観察された
 クラス B にも性質 P が共通に成り立つ。

A が B に含まれている場合にこの推論は帰納になる。

この形式の推論が蓋然性の高いものであるためには、第一にクラス A とクラス B の間に何らかの共通点がないといけない。これを**共通性条件**と呼ぶことにする。前節の例で挙げた、ダイオキシンがラットに有害であるということから、ダイオキシンが人間にも有害であると類推する場合、ラットと人間が同じような生理学的性質を持っているということが共通している。つまりダイオキシンが害を引き起こすメカニズムがラットと人間で共通していると思われるのである*2。しかし生理的なメカニズムがラットと大きく異なる生物（例えば植物など）に対してこの性質を類推することは誤りである可能性が高い。帰納に関してはクラス A はクラス B に含まれているために共通性条件は一般に満たされていると考えられる。

帰納と類推が蓋然性の高いものであるためのもう一つの条件は、クラス A とクラス B の共通性と、A から B に敷衍される性質 P との間に何らかの関連性がなければならない、というものである。これを**関連性条件**と呼ぶことにする。例えば島国であるイギリスと日本で、自動車が左側通行であるということから「島国では自動車は左側通行になる」と推論することは、島国であるという性質と、自動車が右側通行であるという性質の間には関連がなさそうであるため、良い帰納とは言えない。

問題 6.1. 以下は非演繹的な推論を使った論証である。以下の論証の問題点を指摘しなさい。

(1) 私は記者としてたくさんの成功した人物にインタビューをしてきた。そこで気がついたのは、彼らの多くが若いころに大きな挫折を経験しているということである。「失敗は成功の母」というが、まさに挫折こそが成功を生むのだ。挫折は苦いものである。しかしそれをバネにして努力していけば、きっと将来の成功につながっていくだろう。

(2) 「無事これ名馬」とは菊池寛の言葉で、怪我をしないで長く活躍できるのが良い競走馬だという意味である。これは人間にも言えることで、どのスポーツを見ても、怪我が多くて成績が良いという選手はまれである。やはり優秀な選手は体の使い方がうまいので怪我をしないのであろう。

(3) 普段暴力を振るう傾向のある人とそうでない人を比べると、前者の方が暴力的な内容を含むテレビ番組を多く見ているということを示す調査がある。ここから暴力的な番組が視聴者に暴力的行為を取らせる可能性があることが分かる。

問題 6.2. 以下の問題に答えなさい。

(1) ある国ではここ 10 年の間、教育関係の費用を毎年増大させているが、その一方、あるシンクタンクが毎年行っている大学生の学力調査では、A 国の大学生の学力の平均はこの期間、年々低下している。このことを説明する仮説を少なくとも二つ立てなさい。ただ

*2 実際にはダイオキシンがラットに対して有毒であるほどには人間に対して有毒ではない、とする説もある。

しシンクタンクの調査は信頼できるものとする。

(2) 日本は医療先進国であり、保健制度、環境、栄養などの条件も良く、平均寿命は高水準であるが、癌による死亡率が他の国に比べて非常に高い。このことを説明する仮説を少なくとも二つ立てなさい。

問題 6.3. 次の文章を読んで問に答えなさい

島に住んでいる動物と大陸に住んでいる動物とでは、サイズに違いが見られる。典型的なものはゾウで、島に隔離されたゾウは、世代を重ねるうちに、どんどん小形化していった。島というところは、大陸に比べ食物量も少ないし、そもそもの面積も狭いことから、動物の方もそれにあわせてミニサイズになっていくのは、何となく分かる気がするが、話はそう単純ではない。ネズミやウサギのようなサイズの小さいものを見てみると、これらは逆に、島では大きくなっていく。

島に隔離されると、サイズの大きい動物は小さくなり、サイズの小さい動物は大きくなる。これが古生物学で「島の規則」と呼ばれているものだ。

(中略)

もっとも印象的なのがゾウの例だ。島ではゾウはどんどん小さくなっていき、ついに、成獣になっても肩までの高さが1メートル、ちょうど仔牛ほどしかないものが出現した。

島では、なぜこのようなサイズの変化が起こるのだろうか。一つは捕食者の問題だと思われる。島という環境は捕食者の少ない環境である。大雑把な言い方をすれば、一匹の肉食獣を養っていくには、その餌として100匹近くの草食獣がいなければならない。ところが島は狭いから、草の量が例えば10匹の草食獣しか養えないとすると、肉食獣のほうは餌不足で生きていけないが、草食獣の方は生きていけるという状況が出現する。つまり、島には捕食者がいなくなってしまうわけだ。こういう環境下で、ゾウは小さくなり、ネズミは大きくなる。

ゾウはなぜ大きいのだろうか。それは多分、大きければ捕食者に食われにくいからだろう。ネズミはなぜあんなに小さいのだろうか。それも捕食者のせいだろう。小さくて物陰に隠れることが出来れば、捕食者の目を逃れられる。

ゾウというものは見るからに偉大なものである。動物仲間でも、ゾウがくれば、どうぞどうぞと順番をあけて水を飲ませてくれる。だから大きければなんでもハッピーと、ちょっと見には見えるかもしれない。しかし、第9章で見るように、ゾウの骨格系は重い体重を支えるために、かなりの無理をしている。無理を押して捕食者に食われないよう、頑張って大きくなっているのである。捕食者がいなければ、なにもこんな無理をしてまで、大きいままにいることはない。

大きいことにともなう犠牲はまだある。ゾウは非常に大きいことにともない一世代の時間が長く、その結果、突然変異により新しい種を生み出す可能性を犠牲にしている。非常

に大きいということは非常に特殊化しているとみなせ、これは進化の袋小路に入り込んだことを意味しているだろう。事実、ゾウの仲間では現在生き残っているのはインドゾウとアフリカゾウの二種類だけで、この仲間は絶滅へと向かっているものたちである。ゾウにしてもクジラにしても、巨大なものは、人間が獲る獲らないにかかわらず、近い将来の絶滅が運命づけられているもので、そういう意味でも貴重な動物たちであろう。

一方、ネズミにしても、好き好んでちんまりしているわけではないだろう。非常に小さいということは、しょっちゅう餌を食い続けなければならず、餌がちっとでも見つけれなくなったら、すぐ飢えて死ぬ危険に直面する。これは苦しい。体のつくりにしたって、小さいことからくる無理があるだろう。小さければ心臓はいつも早鐘のように打ち続けるわけで、これは心臓や血管に大きな負担をかけることかもしれない。

偉大に見えるゾウも、できれば「普通の動物」にもどりたいのであろう。ネズミにしたってそうだ。だからこそ、捕食者という制約がなくなると、ゾウは小さくなり、ネズミは大きくなって、哺乳類として無理のないサイズに戻っていく。これが「島の規則」の一つの解釈である。

(本川達雄、『ゾウの時間 ネズミの時間——サイズの生物学』、中公新書、1992 年)

1. この文章が書かれた背景と、この文章で提起されている問題を書きなさい。
2. その問題に対して、筆者の主張は何か。またその根拠は何か。
3. この文章を要約しなさい。

6.3 統計的相関と因果関係

日本人の成人男性全体をサンプルにして、それぞれの身長と体重を調べたら、身長が高い人の方がそうでない人よりも体重が重い傾向があるだろう。このようにある集団の中で二つの性質を調べたときに、一方の性質を表わす数値が高いほど、もう一つの性質を表わす数値が高い（または低い）時に、この二つの性質はその集団の中で統計的に相関しているという。一方の数値が高ければ他方も高くなる時、これら二つの相関を正の相関といい、一方の数値が高ければ他方が低くなる時、負の相関という。

二つの性質に統計的な相関が見られるとき、それらの間に何らかの因果関係があると推測したくなるのは自然であるが、しかしその際には私たちは慎重にならなければならない。性質 P が性質 Q と統計的に相関している時、少なくとも次の三つの可能性がある。

1. P が Q の原因になっている。
2. Q が P の原因になっている。
3. 別の性質 C が存在して、それが P と Q の共通の原因になっている。

他の可能性を考えずに、すぐに一つの可能性に飛びつくのは大きな間違いのもとである。例えば次の例を考えよう。

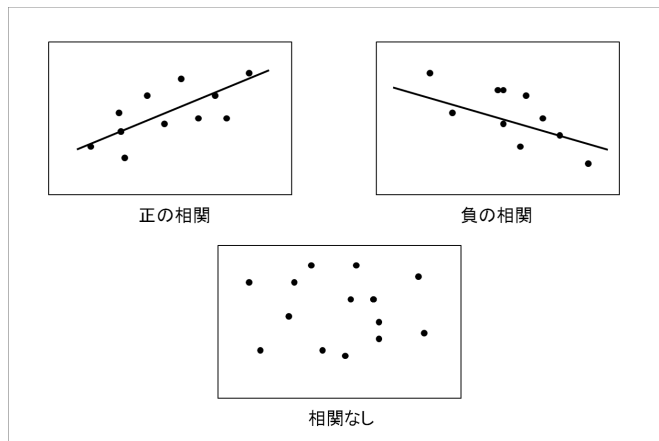


図 6.2 統計的相関

ダイエット食品の効用に疑問を持ったマリエ・アンゾ博士は、ランダムに選んだ男女 1000 人ずつ、計 2000 人に 1 日に食べるダイエット食品の回数と量を尋ねてみた。ついでに各自の肥満度 $[(身長 - 体重) / 110]$ も測定してみた。その結果、次のことが判明した。

(a) ダイエット食品を食べる回数が多ければ多いほど、肥満度が高い。

(b) ダイエット食品を食べる量が多ければ多いほど、肥満度が高い。

結論として、マリエ・アンゾ博士は、ダイエット食品はあまり効果がないばかりか、逆の効果が観察されると発表した*3。

「効果」というのは因果関係を表わす言葉であり、ここで「逆の効果が観察される」というのは「ダイエット食品を食べることが肥満の原因になるということが観察される」、ということを表わしている。しかしこれは誤りである。観察されたのはあくまでも、ダイエット食品の摂取頻度（あるいは摂取量）と肥満度との間の統計的な相関である。因果関係は観察されたのではなく、推測されたものであり、そしておそらくこの推測は誤っている可能性が高い。というのもダイエット食品の摂取が肥満の原因になったというよりも、肥満がダイエット食品の摂取の原因になった方がありそうなことだからだ。

統計的相関から何らかの因果関係を推測すること自体は悪いことではない。しかしそのようにして推測された因果関係はあくまで仮説だということは注意しなければならない。その仮説に基づいて予測を立て、更なる調査を続けなければならない。上の例でいえば、ダイエット食品を食べることが肥満を引き起こすのであれば、調査対象がダイエット食品を食べ始める以前よりも食べ始めた以後の方が体重が増えているだろうと予想できる。そのような予想をさらなる調査によって確かめることは難しいことではない。そしてもしこの予想が当たっていれば、先ほどの仮説はかなり蓋然性を増すだろう。もしこの予想が外れれば、ダイエット食品の摂取が肥満を引き起こすという仮説は棄却される。

*3 谷岡一郎『「社会調査」の嘘——リサーチ・リテラシーのすすめ』（文春新書）。

統計的な調査は一般的に、何らかの傾向を調べたい母集団の中から特定の対象を選び出して調査を行う。これらの対象をサンプルという。統計的調査を行う（あるいは評価する）ときには、サンプルの選び方が適切かどうかにも注意を払う必要がある。特にサンプルの数は十分か、サンプルは偏っていないか、対照群での結果はどうなっているかに注意しなければならない。

サンプルの偏りはデータ収集の方法によって意図せずに引き起こされることがある。例えば「血液型人間学」を提唱した能見正比古は、彼の著書に付録したアンケート用紙に読者が記入して送って来たデータをもとにして、血液型と性格の間には一定の関連があると論じている。しかしながらこのサンプルはすべて能見の著書の読者という非常に特殊な対象から構成されている。彼の著書を読み、そして自らアンケートに協力しようという人間は、彼の著書に書かれている血液型と性格の関わりをすでに信じ込んでしまっている可能性がある。このようなサンプルから集めたデータにある一定の傾向が見られたとしても、それを日本人一般に拡張することは誤りである。また例えば街頭での聞き取り調査なども、その時間にその場所にいる人間という条件によって、サンプルに偏りを生み出している可能性が高い。あるいはそもそもその調査に協力しようと思う人間がそもそも何らかの特殊な傾向を持っている可能性もある。

対照群とは、統計的相関や因果関係を調べる際に重要な考えである。性質 P と Q が相関している（あるいは因果関係がある）かどうかを知るには、性質 P を持つものの中で性質 Q の出現頻度を調べるだけでは十分ではなく、性質 P を持たないものの中での出現頻度と比較する必要がある。このとき比較の対象になるグループを対照群と呼ぶ。

問題 6.4. 以下の統計的なデータから、どのような仮説が立てられるか（何個でも）。またその仮説を検証するにはさらにどのような調査をおこなったらよいか。

(1) ある小学校で、自分の携帯電話を持っている生徒と持っていない生徒とでは、後者の方が学校の成績が顕著に良かった。

(2) ある大学病院では、入院患者のうち病院の半径 10km 以内に住んでいる患者と、それより遠くに住んでいる患者とでは、前者の方が病気の治癒率が高かった。

(3) 乳幼児期に母乳を与えられた時期の長さで成人してからの IQ の高さには緩やかな相関がみられた。

問題 6.5. (1) 南太平洋のある島では、「虱が体に付くと健康によい」と信じられている。調査をしたところ実際に健康な人間の体の方が多くの虱が付いていた。このことを説明する仮説を少なくとも二つ立てなさい。

(2) 食生活と非行の関係を調べるために、10 歳から 16 歳までの子供を対象にアンケートを行ったところ、インスタント食品やファストフードを食べる頻度と、暴力や万引きなどの非行の間には強い相関関係が見られた。このことを説明する仮説を少なくとも二つ立

てなさい。

問題 6.6. 以下の文章を読んで設問に答えなさい。

米国の人類学者たちが江戸時代の中中部地方のある村の 1671 年から 1871 年までの戸籍を調査したところ、16 歳未満で死ぬ子供の割合は 27.5 %であった。母方の祖母と同居している男児とどちらの祖母とも同居していない男児を比較すると、前者の方が 16 歳未満で死亡するものが 52 %少なかった。一方、父方の祖母と同居している男児とどちらの祖母とも同居していない男児を比較すると、前者の方が 16 歳未満で死亡するものが 62 %多かった。女兒の場合はこのような顕著な差は見られなかった。

1. この調査結果を見て、どのような疑問が生じるか。(いくつでも)
2. その疑問を説明する仮説にはどのようなものがありうるか。(いくつでも)
3. 上の文章で書かれていることと、問 1、問 2 の答えに基づいて小論文を書きなさい。
ただし背景の説明、問題提起、仮説の提示、その仮説が疑問を説明することの論述を含め、分かりやすい文章で書くこと。

問題 6.7. D 教授の研究グループはある企業の社員にアンケートを行って、支給されたボーナスの額、ボーナスの使い道、ボーナスをもらう前後の幸福度を調べた。この調査によるとボーナスをチャリティーへの寄付やプレゼントなど、他人のためにどれだけ使うかということと、ボーナス支給後の幸福度の上昇との間には統計的に有意な相関が見られた。一方で、支給されるボーナスの額と幸福度の上昇との間には統計的に有意な相関は見られなかった。ここから D 教授らは「他人のためにお金を使うことは、幸福度を上昇させる要因である」という仮説を立てた。このことを踏まえて以下の問に答えよ。

- (1) D 教授の仮説とは異なる仮説を考えなさい。
- (2) D 教授の仮説を確かめるためにはどんな実験が有用か。

第7章

合理的意思決定

ある状況において、結果として得られる利益を最大化するように行動を選択することが、いわゆる合理的意思決定である。合理的意思決定はゲーム理論、経済学、心理学、リスク工学、哲学などの様々な分野で扱われる。

7.1 意思決定とリスク

現在残っている意思決定についての最も古い理論はアリストテレスのものだろう。アリストテレスは私たちの実践的な判断は次のような形式に従うと考えた。

A を行えば B が得られる。

s は B を欲している。

故に s は A を行うべきである。

この形式の推論を実践三段論法という。

しかしながら実際の意思決定においては、私たちがこのような単純な図式に従っていることはまれである。なぜならばほとんどすべての行動には望ましい結果と望ましくない結果が付随しており、単純にその行動の望ましい結果だけを考えて行動することは危険だからである。また多くの場合、 B を得る事ができる行動は A 以外にも色々あるかもしれない。例えば近視の人が視力を補いたい思ったとする。これには眼鏡を買う、コンタクトレンズを買う、レーシック手術を受ける、視力回復トレーニングをするなどの方法がある。これらはそれぞれ異なるコスト（金額、時間、労力など）を要する。また眼鏡には容色を損なうというマイナス面もあり、レーシックには手術に伴う苦痛というマイナス面がある。人々はこれらの複数の方法を考慮し、その中で利益と損失の差が最大になるもの、最も効率よく視力の矯正を可能にする方法を選択しているのである。つまり次のような図式化がより実践に近いだろう。

A_1 または A_2 または... または A_n を行えば B が得られる。

A_k が最も効率的である。

s は B を欲している。

故に s は A_k を行うべきである。

しかしながらこの図式もまだ単純すぎる。というのも行動と結果の間には常に不確実性が介在するからである。例えばレーシック手術を受けた人の中には手術後も再び視力が落ちてしまう人もいれば、まれに目の健康を害する人もいる。コンタクトレンズは眼鏡に比べると紛失する可能性が高い。視力回復トレーニングでは視力が回復する保証はない。私たちが行動を選択するときには、その結果の不確実性も考慮に入れている。このような不確実性はリスクと呼ばれる。より正確にはリスクは

ある事象が生起する不確実性の程度と、事象が生起したことによって生じる影響の大きさを総合的に勘案することによって測られる量

として定義される^{*1}。具体的なリスクの計算方法の一つは次のようなものである。まず何らかの考慮すべき影響をもたらす事象 e （「エンドポイント」と呼ばれる）を考える。 e が生起する不確実性の度合いを p 、またその影響の大きさを q によって表す（通常 p は確率である）。このとき e のリスク Re は、不確実性と影響の大きさを総合的に勘案することによって得られる量を計算する関数 f を用いて $f(p, q)$ によって表される。最も単純な場合では $f(p, q)$ は p と q の積 pq である。

一般に私たちは複数のリスクを同時に考慮することが多い。例えばある行為 B に伴うエンドポイントが $e_1, e_2, \dots, e_n$ だとしよう。また各 e_i の生起する不確実性を p_i 、その影響の大きさを q_i とする。このとき B に伴うリスクは、各 e_i のリスクの和によって表すことが出来る。

例えば雨が降るかどうか不確実であるとき、傘を持っていくことと持っていないことのリスクを考えよう。ここでは単純に $f(p, q)$ は p と q の積とする。雨に濡れることによってあなたが感じる損害が 30 であるとする。また雨に濡れた場合、あなたは $1/20$ の確率で風邪を引き、この損害が 200 であるとする。一方、晴れている中を傘を持って歩くことによってあなたが感じる損害が 10 であるとする。また晴れている場合、あなたは $1/2$ の確率で傘をどこかに置き忘れ、その場合の損害が 20 であるとする。降水確率が P だとすると、傘を持っていくことのリスクは $(1 - P) * 10 + (1 - P) * (1/20) * 200 = 20 - 20P$ であり、傘を持っていないことのリスクは $P * 30 + P * (1/20) * 200 = 40P$ である。従って降水確率が $1/3$ を超える場合には傘を持っていった方がリスクが小さく、 $1/3$ 未満のときは傘を持っていない方がリスクが小さい。

このようにリスクを定義して、様々なリスクを評価し管理することをリスク分析とい

^{*1} リスクの定義は文献によって異なる。ここでの定義は以下の文献を参考にした。遠藤靖典編著、村尾修、岡本健、掛谷英紀、岡島敬一、庄司学、伊藤誠著『リスク工学シリーズ3 リスク工学の基礎』、コロナ社、2008年。日本リスク研究会編『リスク学事典』、初版、TBSブリタニカ、2000年。

う。専門分野としてのリスク分析は近年急速に発達している分野であり、工学、経営、金融、医療、環境管理、政策決定などに応用されている。そこでは専門性の高い複雑な分析手法が使われているが、しかしその基本的なアイディア（行為の潜在的なコストとベネフィットを確率とともに考慮する、というアイディア）は私たちの日常的な意思決定にも応用できる。

リスク分析には様々な限界があることも私たちは認識すべきである。第一にリスクを計算して決定した行動が大きな損害を引き起こすことはありうる。リスク分析がある行動を推奨するのは、その行動が相対的にリスクが小さく、利益が大きいからであって、リスクがないからではない。リスクに関して私たちが第一に理解しなければならないことは、すべてのリスクを完全に除去することは不可能だということである。この世界は不確実性に満ちている。ある行為によって望ましい結果が——そしてそのみが——確実に得られるということとはあり得ない。もし私たちがあるリスクを完全に除去しようとするならば、そのことは別なリスクを増大させる。従って「ゼロリスク」を目指すことはそれ自体がリスクな行為である。リスクは必ず存在する。そのことを理解した上で私たちは、リスクを出来るだけ小さくすることを目指し、かつあるリスクが現実化したときにその影響を最小限にとどめる準備をしなければならない。そして意思決定をするときには常に、リスクを冒していることを覚悟しなければならない。第二に、リスク分析においては、ある行動がもたらす影響をある範囲に限定して考えなければならないが、その一方でリスク分析は目の前のコスト-ベネフィットだけを考えていては失敗するケースがある。例えば企業が直接的な利潤に結びつかない文化的・社会的活動を行うことは、長い目で見て企業に利益を与えるかもしれない。また労働者や消費者にとって不利益となる経済活動を行った結果、企業が信頼を失い、長期的にはマイナスの効果がもたらされる可能性もある。社会貢献やコンプライアンスの重視は、このような目に見えにくい潜在的なコスト-ベネフィットに対処するための一般的な方針であると言えるかもしれない。第三に、リスク分析は主に経済的な観点で計算されるリスクを扱う。従ってそれは経済的に測れない価値を考慮に入れていない。生命、環境、文化などの価値や、個人的な価値はそこでは考慮されない。

リスク評価の際に、経済的なコスト-ベネフィットモデルのみに依拠するのは危険である。反道徳的な行為は、一時的には効率よく利益を上げられるかもしれないが、長い目で見て損失になる場合も多い。人間は、経済学のモデルが前提するように、経済的利得を最大化するように行動してはいない。形式的なリスク分析によって計算できるのは、多くの場合、経済的な観点で測ることのできるリスクだけである。そうでないリスクについては私たちは自分の感覚に頼らざるを得ない。そしてこのような感覚は多分に個人的・主観的なものである。経済的合理性という観点ですべての行動を判断するのは逆に不合理である。この点についてもう少し次節で述べよう。

7.2 合理性と感情

西洋近代の伝統では感情は理性と対立するものと考えられ、従って合理的な判断によって障害だと考えられた。確かにそういう側面はあるだろう。情にほだされて、あるいは怒りに駆られて、私たちはしばしば合理的でない判断をしてしまう。しかしながら人間が感情によって動いているという厳然たる事実がある以上、そういったものを配慮せずに合理的意思決定ができると考えることもまた誤っている。

人間がいかに感情によって行動を決定しているかということを示す次のような実験がある。被験者 A, B の二人に対して 10000 円が提供される。金額の配分は A に委ねられる。ただし B はその配分が不満であれば A の提案を拒否することができる。B が拒否した場合には A も B をお金を受け取ることはできない。この場合、A と B にとって合理的な決定などのようなものだろうか？ 一つの答えは次のとおりである。A にとって合理的な決定は、9999 円を自分に、1 円を B に分配することである。B にとって合理的な決定は、自分に提供される金額が 0 円でない限りは A の提案を受け入れることである。なぜならば B にとっては、A の提案を拒否すれば 1 円も手に入らないのだから、A の提案がいくらであっても、それを受け入れる方が得られる利益は大きいである。一方で A にとっては、B はたとえ 1 円でも受け入れると予想されるから、自分の利益が最大になるように分配するのが合理的である。しかしながら実際に実験してみると、ほとんどの場合このような結果にはならない。多い時には A は五分五分の分配を提案することもある。また B は場合によっては A の決定を拒否することもある。

経済的合理性とは少しでも多くの利益を得られるように行動を決定することである。古典的な経済学はこのような合理性のモデルに基づいて経済活動を理解しようとしてきた。しかしながら現実の人間は必ずしもそのように行動するわけではない。人間は合理性に基づいて行動する以上に、感情に基づいて行動する動物である。上の実験はそのことを表わしている。被験者 B が A の提案を拒否するのは、A の提示する金額が少なく、そのことに対する怒りが生じ、A に対して報復したい感情が働くからであろう。一方 A が 1 円よりも多くの金額を提示するのは、B のそのような感情をあらかじめ予想しているか、あるいはあまりにも少ない金額を提示するのは B が気の毒だという感情が働くからであろう。この被験者同士はもともと面識がなく、また実験の後はおそらく二度と会わないだろうにも関わらず。

この実験のもう一つの教訓は、合理的な判断とは文脈依存的だということである。完全に経済的合理性に従って行動する行為者のみからなる社会においては、A の立場に立った人間は 9999 円対 1 円の分配を選択するのが合理的である。しかしながら感情という不確実なものに従って行動している人間によって構成される社会においては、その選択は必ずしも合理的ではない。あまり低い金額を相手に提案すると、相手の感情を害してしまい、結果的に相手から拒否される可能性があるからである。この場合、私たちは相手がどのような人間なのかを考えて行動しなければならない。相手がどんな人間かを知らない場合

	相手が黙秘する	相手が裏切る
自分が黙秘する	両方 2 年	自分が 4 年、相手が 1 年
自分が裏切る	自分が 1 年、相手が 4 年	両方 3 年

表 7.1 囚人のジレンマ

は、その社会で一般に受け入れられている常識、通例、規範、道徳などを考慮して行動を選択しなければならない。そしてそのような選択は多くの場合、一定の規則に従った推論や計算に基づくのではなく、個々人がその社会の中で生活しているうちに培った直感や習慣、価値観などに基づいている。

意思決定とその文脈の間にはさらに複雑な関係がある。意思決定の合理性が文脈に依存するというだけでなく、私たちの意思決定（の傾向）が、意思決定の合理性を評価する文脈そのものに影響を与えるのである。例えばあなたの友人の一人がしばしば約束した時間に遅れてくるとしよう。やがてあなたはその友人と待ち合わせをする時には時間通りに待ち合わせ場所に行くことが合理的ではないと考えるようになるかもしれない。なぜならば時間通りに待ち合わせの場所に行っても高い確率であなたは長時間待たされ、従って時間を浪費することになるからである。その結果、あなたはその友人との待ち合わせの時には約束通りの時間よりも遅く行くようになる。そうしているうちに、友人がたまたまあなたより早く待ち合わせ場所に付いたときに、あなたが時間通りに来ていないということを知って、あなたと同じように、あなたとの待ち合わせには時間通りに行くことが合理的でないという判断をするようになるかもしれない。このようにしてあなたとその友人の間では約束よりも遅く待ち合わせ場所に行くことが慣習となり、その結果として約束よりも遅く行くことが合理的な意思決定になる。

意思決定と文脈の間に複雑な相互作用があることを示す例が、囚人のジレンマと呼ばれる、次のような状況である。ある事件の犯人が二人つかまり、別々の部屋で取り調べを受けている。彼らはそれぞれ、その事件において相手がやったことの詳細を警察に話せば自分の刑が減らされるという取引を持ちかけられている。もし彼らが二人とも相手の犯行を白状しなければ、二人とも 2 年の懲役を科される。一方が白状して一方が黙秘していれば、白状した方は 1 年の懲役、黙秘した方が 4 年の懲役を科される。もし両方が白状すれば両方とも 3 年の懲役を科される（表 7.1 参照）。犯人たちは互いに連絡を取る方法がなく、相手はどう出るかは分からない。このような状況に置かれたら、黙秘するのと相手の犯行を暴露するのと、どちらが合理的な判断だろうか？ 一つの考え方は次のようなものである。相手が私の犯行について黙秘しているとする。このとき私が彼の犯行について黙秘すれば私の刑は 2 年、私が彼を裏切れば私の刑は 1 年である。逆に彼が私を裏切っているとする。このとき私が黙秘すれば私の刑は 4 年、私が彼を裏切れば私の刑は 3 年である。従っていずれにしても相手を裏切った方が私にとっては利益が大きい。従って相手を裏切るのが私にとって合理的な選択である。

ところが相手も私と同じように合理的だとしたらどうだろうか。その場合、相手もまた私を裏切ることを合理的な判断の結果として選択しているだろう。従ってその場合、私も相手も懲役 3 年の刑を受けることになり、これは両方が黙秘を選択した場合（従って私も相手も 2 年の懲役を受ける場合）に比べて、両方ともに損をしている。両方が「合理的に」考えて行動したはずなのに、結果的には両方が「合理的に」行動しなかった場合の方が、両方ともに得られる利益は大きいという結果になっている。これはある意味では逆説的である。これについて可能な説明は、一つには私たちはお互いに対して誠実であることを約束し、そしてその約束を守るように行動することによって、実際にそのように行動することがより高い効用を提供するような環境を作り上げることができる、ということである。

問題 7.1. (1) なんでも願い事をかなえてくれる魔法のランプを買うことができるとする。ただしあなたはそのランプを買った値段よりも安く誰かに売らなければならない。もし誰にも売れなかった場合はあなたは地獄におちて苦しむことになる。このランプをいくらだったら買っても良いか。

(2) 次のような賭けを考えよう。賭けの参加者は裏が出るまでコインを投げ続け、賞金として、連続して表が出た回数で 2 をべき乗した金額（つまり k 回連続で表が出た場合 2^k 円）を受け取ることができる。あなたが胴元だったら、このゲームの参加費をいくらに設定するべきか。リスク分析の方法を使って考えなさい。

(3) あなたはあるイベントを企画している。そのイベントの見込まれる利益とその確率の組み合わせは次のようになっている。

利益または損失（万円）	500	300	-500	-5000
確率（％）	20	70	9	1

損失が出た場合に備えて、あなたは保険をかけておくことができる。保険には A と B 二種類があり、それぞれ次表のような内容である。

	掛け金	補償の内容
保険 A	100 万円	損失の全額
保険 B	10 万円	200 万円

このとき以下の (a)(b) の問に答えなさい。

(a) あなたは保険を利用するか、もし利用するのであれば A と B のどちらを選ぶかを、リスク分析を使わずに考えなさい。

(b) リスク分析の方法を使って、保険を使わなかった場合、保険 A を使った場合、保険 B を使った場合のそれぞれのリスクを計算し、どの選択肢が良いかを判断しなさい。

7.3 疑うことと信頼すること

論理的思考あるいはクリティカル・シンキングにおいては、安易に他人の議論の結論に飛びつかないこと、適切に疑問を持つことが重要である、と言われる。しかしながら100%正しいという確信を持たなければ他人の議論を受け入れられないのだとすれば、それは非常に非効率なことである。私たちはある程度のところで他人を信頼するために思い切った飛躍をする必要がある。そしてその際には多くの経験によって培われた直感のようなものに頼らざるを得ない。もちろんそのような直感を分析して、ある程度は明文化された規則として書くこともできるだろう。しかしそのような方法には必ず一定の限界があるものである。嘘をついている人間を見破るための完全に客観的な基準などはない。

言語を用いたコミュニケーションは人間の文化と文明にとって不可欠である。それは他の動物とは全く異なる仕方で私たちの思考を促進する。特に人間の言語に特徴的なのはその合成性である。言語（あるいは一般に記号）は環境のある性質を抽象して分節化する機能を持つ。例えば「白」という言葉は環境に存在する様々な対象（雪、雲、菌、羊、木蓮の花、等々）の特定の側面を抽象する。また白にはまったくの純白からくすんだ白、黄ばんだ白など、様々なバリエーションがあるが、「白」という言葉はそれらの微妙な違いを無視して扱う。このことは当面のコミュニケーションにとって重要でない環境の側面を捨象して情報を効率よく伝達するという利点を持つ反面、伝達できる情報があらかじめ決められた種類のものに限定されるという欠点を持つ。例えばウサギは後ろ足で地面を叩くことによって捕食者の存在を仲間に知らせるが、しかし捕食者の種類、数、どの方角からどれほど近くまで迫っているのかまでを知らせることはできない。この欠点を補うのが人間の言語に特徴的な合成性である。私たちの言語の文法は、異なる言葉を組み合わせることで新しい意味の単位を作り出すことを可能にしている。上でやったように「白」という言葉を他の言葉と組み合わせ、「純白」、「くすんだ白」等々という新しい表現を作ることによって、無限に近いニュアンスを表現することができるのである。

この合成性はさらに、環境に存在しないものを表象することさえ可能にする。例えば青いバラは存在しないものであるが、人間は言葉を合成することによって存在しないものを表わす表現を作ることができるのである。このことは過去についての記述や未来についての記述を可能にし、反省、予測、計画といったたぐいの行動を促進してきた。

このような言語の特徴は、より効率的な協力的行動の進化の過程で生まれてきたものであろう。しかし他方で言語がこのように複雑化・高度化したことは、言語を用いて虚偽の情報を伝達することを可能にした。そして虚偽の情報を流すことにより利益を得るという能力をも人間は発達させてきたのである。言語学者チョムスキーは、人間の言語の文法には文化に依存しない普遍的な構造があり、それゆえそれは生得的なものである、と主張する。だとすれば言語を使用することで利益を追求する二つの傾向、すなわち協力と欺瞞もまた人間の生得的能力であるかもしれない。いずれにせよ言語には、他人との互恵的協力的行動を促進するという側面と、他人を欺くことによる利己的利益の追求を促進するという

二つの側面がある。この二つの側面は、言語が合成的文法を持つことの帰結であって、一方だけを切り離すことは出来ない。

嘘を根絶することは事実上不可能である。ただし容易に嘘に騙されないことによって、嘘つきの得る利益を減らすことは出来る。逆に言えば嘘に騙されることは、嘘つきに利益を提供することによって、社会に嘘つきをはびこらせる結果をもたらす。従って私たちは、たくさんの情報から正しい情報、有益な情報を選別する目を持たなければならない。私たちは賢い情報の消費者にならなければならないのである。

また私たち自身も誠実な情報の提供者にならなければならない。私たちは正しい情報を分かりやすく提供することで、協力的行動の合理性を高めることが出来る。というのも正直者の多い社会ではそれだけ他人を信頼して協力することが高い効用をもたらすからである。逆に私たちが誤った情報や嘘を流すことで、社会全体を他人を信頼せず、非協力的な行動を取る傾向に誘導することになる。

言語を使った行動は本質的に社会的なものである。ある言明をするときには、私たちはそれを信じて行動した人に対してその結果の責任を負わなければならない。それゆえにある言明をするときには、それがどのような言明なのかを明確にしなければならない。それは仮説なのか、断言なのか、伝聞なのか、どのような根拠に基づいているのか、どのような条件のもとに成り立つのか、等々。またその発言そのものだけではなく、その発言からどのようなことが含意されるのかということも私たちは知らなければならない。これは情報の発信者としての責任である。一方で、情報を受け取る側も、それを信じて行動した結果に対する責任の一部を担わなければならない。他人の言うことを吟味せずに鵜呑みにして行動し、その結果として生じたことをすべて相手のせいにするのは無責任な行動である。

情報を吟味しながら発し、受け取ることは結果として共同体の中での信頼と協力的行動を促進して、より効用の高い社会を実現することに貢献する。

第 8 章

終わりに――信頼の効用

人間の思考と他の動物の思考とではどこが最も異なっているか、と聞かれたらあなたはどうか答えるだろうか。私は一つには見知らぬ他者を信頼する能力だと思う。例えば電車を待って並んでいて、少しのあいだ列を外す必要ができた時、私たちは後ろに立っている人に荷物を見てくれるよう頼んだりする。その人が信頼できるという根拠はないのにも関わらず。

ある記事で「あなたは他人は信頼できると思うか？」という質問に対して「そう思う」と答えた人の割合を国別に調べたアンケート調査の結果が紹介されていた*¹。「信頼できる」と答えた人の割合が高かったのはノルウェー、デンマークなどで 60 % 以上、日本を含む先進国の多くは 30 % から 40 % の間に集中していた。低かったのはブラジル、ウガンダ、フィリピンなどで 5 % ほどであった。

その記事の著者は経済的に豊かな国ほど他人を信用する傾向があり、経済発展には他人への信頼が必要なのだ、と推測している。確かに他人をまったく信頼しない人たちがばかりで構成された社会が大きな経済発展を遂げるのは難しいだろう。アメリカの貨幣と紙幣には「In God We Trust」という言葉が刻まれているが、これは貨幣経済（そしてもちろん信用経済）が互いに誠実であることを前提として成立していることを象徴している。もっとも信頼というものは（偶然にあるいは故意に）裏切られることもしばしば、信頼が強ければ強いほど裏切られた時の痛手は大きい。日本のバブル経済の崩壊やアメリカのサブプライム問題は、信頼が過ぎたことの結果であろう。

アメリカの作家カート・ヴォネガットは社会的ダーウィニズム（簡単に言えば社会は弱肉強食の生存競争の舞台だ、という考え）を最も有害な思想と評しているが、私も同感である。互いに信頼し合い、協力し合えるということが、人間精神の最も素晴らしい特徴の一つだ。ノーベル経済学賞を受賞した経済学者のジョン・ナッシュ（映画『ビューティフル・マインド』の主人公）の理論は、人間は互いに信頼し合うことによって、アダム・スミスのな、あるいはダーウィンの弱肉強食の社会よりも、より効用の高い社会を実現することができる、というものだった。

*¹ P. J. ザック、「信頼のホルモン オキシトシン」、『日経サイエンス』、2008 年 10 月号、pp 60-66。

ところがある動物行動学者によれば、最近の日本の若者には他者を信頼しない傾向が強くなっているそうである。彼は最近の若者の特徴として、身内意識が強い反面、見知らぬ他人に対して排斥的で不寛容、公共心がない、などの点を挙げている。その原因は、核家族化、少子化、地域社会の関係の希薄化によって親子の共依存が強まり、子供の自立と社会化が十分になされなくなっていることにある、と彼は論じる。彼の論証には色々と問題もあるが、しかし近年のひきこもりの増加、公共マナーの低下、モンスター・ペアレンツの増加などを見ると、彼の言うことにも一理あるように思える。

問題は多くの人が他人を信頼していない環境で、自分だけが他人を信頼して行動するのは危険だ、ということである。例えばノルウェーやデンマークのような社会では他人を信頼して行動することが合理的だが、ブラジルやウガンダのような国では同じことが非合理的になる。囚人のジレンマの状況において、相手が裏切ることを分かっているならば自分も裏切りを選択する方が合理的であるように。この辺りの議論は世界中の国が戦争を放棄すれば軍隊はいらない、しかし世界中の国が戦争する気満々なのだから軍隊は必要だ、という議論と同様である。このことは他人を信用せずに行動する人間が増えてくると、その傾向にどんどん拍車がかかっていく、ということを意味する。

これまでの日本は他人をそこそこ信頼している社会で安定してきた。しかしこれから先はひょっとしたらそうではなくなるのかもしれない。だとすればこれは悲しいことだ。このような大きな社会の流れに対して個人ができることなどないも同然だが、私は幸いたくさんの若者の前で話をする機会に恵まれているので、信頼の効用を学生に話して聞かせたりするのである。もっとも朝日新聞が2008年に行った世論調査では「あなたが信頼しているもの」の1位が「家族」で2位が「天気予報」、教師はずっと下だったのだが。

第 9 章

付録：集合論の基礎知識

定義 9.1 (集合, 要素). 集合 *set* とは任意の対象の集まりである. 任意の対象 $a, b, c, \dots$ を $\{ \}$ でくくった表現, すなわち $\{a, b, c, \dots\}$ は $a, b, c, \dots$ からなる集合を表す. このとき $a, b, c, \dots$ はこの集合の要素または元 *element* であるという.

対象 a が集合 S の要素であるということを $a \in S$ と表現する. また a が S の要素ではないということを $a \notin S$ と表現する.

集合の表記において, 要素の並び方の順序は問われない. 従って $\{a, b\}$ と $\{b, a\}$ は同じ集合を表現している.

また一つの集合に同じ対象は一個しか属さない. 従って $\{a, a\}$ は $\{a\}$ と同じ集合を表現している.

定義 9.2 (空集合). 要素を一つも持たない集合を空集合 *empty set* といい, $\emptyset$ によって表す.

定義 9.3 (集合の内包的表記). $C(x_1, \dots, x_n)$ によって n 個の変数^{*1} $x_1, \dots, x_n$ を含む何らかの条件——例えば「 x_1 はアルファベットの文字である」, 「 x_1 を 3 で割った余りと x_2 を 3 で割った余りは等しい」, 「 $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ 」等々——を表わす. このとき条件 $C(x_1, \dots, x_n)$ 満たすような対象 $x_1, \dots, x_n$ の組 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ すべてからなる集合を $\{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid C(x_1, \dots, x_n)\}$ で表す. 例えば $\{x \mid x \text{ は } 5 \text{ 以下の自然数}\}$ は 5 以下の自然数すべてからなる集合, すなわち $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ である^{*2}.

定義 9.4 (部分集合). 集合 S のすべての要素が集合 T の要素でもあるとき, S は T の部分集合または単に部分 *subset* であるという. このことを $S \subseteq T$ によって表す.

任意の集合 S について, $\emptyset \subseteq S, S \subseteq S$ が成り立つ.

定義 9.5 (集合の同一性). $S \subseteq T$ と $T \subseteq S$ の両方が成り立っているとき, つまり S の

^{*1} 変数は数だけではなく, 任意の対象を値にとることが出来る.

^{*2} 本テキストでは 0 は自然数として扱う.

すべての要素が T の要素であり、かつ T のすべての要素が S の要素であるとき、 S と T は同一であるといい、このことを $S = T$ によって表す。これは、集合の同一性はその要素の同一性に帰されるということを意味する。

定義 9.6 (真部分集合). $S \subseteq T$ であり、かつ $S = T$ でないとき S は T の真部分集合または単に真部分 *proper subset* であるといい、このことを $S \subsetneq T$ によって表現する。

定義 9.7 (集合族). 集合を要素とする集合を集合族と呼ぶ。 I は集合とする。各 $i \in I$ について S_i が集合であるとするとき、 $\{S_i \mid i \in I\}$ を I によって添え字付けられた集合族と呼ぶ。このとき I をこの集合族の添え字集合と呼ぶ。 $\{S_i \mid i \in I\}$ は $(S_i)_{i \in I}$ と表記されることもある。添え字集合が分かっている場合には $(S_i)_i$ と省略して書く場合もある。

定義 9.8 (集合の和, 共通部分, 差). S の要素と T の要素のすべてからなる集合を S と T の和または合併 *union* といい、 $S \cup T$ によって表す。

S と T に共通の要素からなる集合を S と T の共通部分または交わり *intersection* といい、 $S \cap T$ によって表す。

より一般的に、集合族 $\mathfrak{M}$ に対して、 $\mathfrak{M}$ の合併と交わりを次のように定義する。

$$\bigcup \mathfrak{M} = \{x \mid \exists M \in \mathfrak{M} (x \in M)\}$$

$$\bigcap \mathfrak{M} = \{x \mid \forall M \in \mathfrak{M} (x \in M)\}$$

また I によって添え字付けられた集合族 $(S_i)_{i \in I}$ に対して

$$\bigcup_{i \in I} S_i = \bigcup (S_i)_{i \in I}$$

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \bigcap (S_i)_{i \in I}$$

と定義する。

S の要素であるが、 T の要素ではないものすべてからなる集合を S と T の差 *subtraction* といい、 $S \setminus T$ または $S - T$ によって表す。

例 9.9. $S = \{0, 1, 2\}, T = \{2, 3, 4\}$ であるとき、

$$S \cup T = \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$S \cap T = \{2\},$$

$$S \setminus T = \{0, 1\}.$$

この定義では例えば $S_1 \cup S_2 \cap S_3$ が、 $S_1 \cup S_2$ と S_3 との共通部分を表わしているのか、それとも S_1 と $S_2 \cap S_3$ との和を表わしているのかが不明である。そこで前者を指すためには $(S_1 \cup S_2) \cap S_3$ と表記し、後者を指すためには $S_1 \cup (S_2 \cap S_3)$ と表記して、集合に対する操作が行なわれた順番を明記することにする。しかし例えば $S_1 \cup (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cup S_2) \cup S_3$, $S_1 \cap (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cap S_2) \cap S_3$ なので、このような場合は操作の順番を括弧で表わす必要はない。

事実 9.10. 任意の集合 A, B, C に対して, 以下の事実が成り立つ.

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $(A \setminus B) \cup B = A$
- $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- $A \subseteq A$
- $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば $A \subseteq C$
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \subseteq A \cup B$
- $B \subseteq A$ かつ $C \subseteq A$ ならば $B \cup C \subseteq A$
- $A \subseteq B$ かつ $A \subseteq C$ ならば $A \subseteq B \cap C$
- 任意の x に対して条件 $C(x)$ が条件 $C'(x)$ にとって十分ならば, $\{x \mid C(x)\} \subseteq \{x \mid C'(x)\}$

定義 9.11 (べき集合). S の部分集合のすべてからなる集合を S のべき集合 *power set* といい, $\mathfrak{P}(S)$ または 2^S によって表す. 例えば $S = \{0, 1, 2\}$ であるとき,

$$\mathfrak{P}(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

である.

定義 9.12 (直積). S の任意の要素 x と T の任意の要素 y との対 $\langle x, y \rangle$ のすべてからなる集合 $\{\langle x, y \rangle \mid x \in S, y \in T\}$ を S と T の直積 *cartesian product* といい, $S \times T$ によって表す. 例えば $S = \{0, 1\}, T = \{a, b, c\}$ であるとき,

$$S \times T = \{\langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 0, c \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 1, c \rangle\}$$

である.

$S_1 \times (S_2 \times S_3)$ は $S_1 \times S_2 \times S_3$ と表記するものとする. 直積 $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ の要素は正式には $\langle x_1, \langle x_2, \langle \dots \langle x_{n-1}, x_n \rangle \dots \rangle \rangle$ と書かれるのであるが, これを $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ と表わすことにする.

集合 S だけで直積を作る操作を n 回繰り返して作られる集合を S^n によって表わす. つまり

$$S^1 = S,$$

$$S^{n+1} = S \times S^n.$$

定義 9.13 (関係). 任意の $S_1, \dots, S_n$ について $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ の任意の部分集合 R を (**n** 項) 関係 *n-ary relation* という (ただし $n \geq 1$). R が特に S^n の部分集合であるとき, R を S 上の (**n** 項) 関係という.

例 9.14. $\mathbb{N}$ によってすべての自然数の集合を表し, $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の部分集合 L として $\{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2, x < y\}$ という集合を考える. このとき $\langle x, y \rangle$ が L の要素であるということと, x, y が自然数でありかつ $x < y$ が成り立つということは等しい.

二項関係 R に対して, しばしば $\langle x, y \rangle \in R$ を xRy と略記する.

定義 9.15 (反射性, 対称性, 推移性, 反対称性). R は S 上の二項関係とする.

- (1) 任意の $x \in S$ に対して xRx が成り立つとき, R は反射的 *reflexive* であるという.
- (2) 任意の $x, y \in S$ に対して, xRy ならば yRx が成り立つとき, R は対称的 *symmetrical* であるという.
- (3) 任意の $x, y, z \in S$ に対して, xRy かつ yRz ならば xRz が成り立つとき, R は推移的 *transitive* であるという.
- (4) 任意の $x, y \in S$ に対して, xRy かつ yRx ならば $x = y$ が成り立つとき, R は反対称的 *antisymmetric* であるという.

定義 9.16 (順序, 全順序). S 上の二項関係 $\leq$ が反射性, 対称性, 反対称性を持つとき, R は S 上の順序または半順序 *semiorder, partial order* であるという. さらに任意の $x, y \in S$ に対して, $x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つとき, $\leq$ は S 上の全順序 *total order* であるという.

定義 9.17 (順序集合, 部分順序集合). 集合 S と S 上の順序 $\leq$ の対, $(S, \leq)$ を順序集合 *partially ordered set; poset* と言う. $\leq$ が全順序であるとき $(S, \leq)$ を全順序集合 *totally ordered set* という. どの順序を指しているかが明らかな場合, $(S, \leq)$ を単に S と書く場合もある.

$(S, \leq)$ は順序集合であるとする. M は S の部分集合, かつ M 上の順序 $\leq_M$ が, 任意の $x, y \in M$ に対して,

$$x \leq_M y \iff x \leq y$$

を満たすとき, $(M, \leq_M)$ を $(S, \leq)$ の部分順序集合という^{*3}. またこのような $\leq_M$ は, $\leq$ を M 上に制限した順序であると呼ばれる.

定義 9.18 (上界, 下界, 上限, 下限). $(M, \leq_M)$ は $(S, \leq)$ の部分順序集合であるとする. M の任意の要素 x に対して, S の要素 y が $x \leq y$ を満たすとき, y を M の (ひとつの)

^{*3} $\iff$ は必要十分条件を表す.

上界 *upper bound* であるという。逆に M の任意の要素 x に対して、 S の要素 y が $y \leq x$ を満たすとき、 y を M の（ひとつの）下界 *lower bound* であるという。

S の要素 $\vee M$ が S における M の上限 *supremum* であるのは、 $\vee M$ が

- (1) 任意の $x \in M$ に対して、 $x \leq \vee M$
- (2) M の任意の上界 x に対して、 $\vee M \leq x$

を満たすときである。

S の要素 $\wedge M$ が S における M の下限 *infimum* であるのは、 $\wedge M$ が

- (1) 任意の $x \in M$ に対して、 $\wedge M \leq x$
- (2) M の任意の下界 x に対して、 $x \leq \wedge M$

を満たすときである。

事実 9.19. 任意の $(M, \leq_M)$ に対して、 $(M, \leq_M)$ の上限および下限は存在するならば一意である。

例 9.20. (1) $\subseteq_S$ は $\mathfrak{P}(S)$ 上の部分集合関係であるとする。つまり任意の $M, N \in \mathfrak{P}(S)$ に対して、

$$M \subseteq_S N \iff M \text{ は } N \text{ の部分集合}$$

が成り立つとする。このとき $\subseteq_S$ は $\mathfrak{P}(S)$ 上の順序である。

また $\mathfrak{P}(S)$ の任意の部分集合 $\mathfrak{M}$ に対して $\bigcup \mathfrak{M}, \bigcap \mathfrak{M}$ はそれぞれ $\mathfrak{M}$ の上限、下限である。

(2) $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合とする。また任意の $x, y \in \mathbb{N}$ に対して

$$x \leq y \iff x \text{ が } y \text{ と等しいか, より小さい}$$

が成り立つとする。このとき $\leq$ は $\mathbb{N}$ 上の全順序である。

定義 9.21 (極大元, 極小元, 最大元, 最小元). $(S, \leq)$ は順序集合かつ $s \in S$ とする。任意の $x \in S$ に対して、 $s \leq x$ ならば $s = x$ が成り立つとき、 s は S の極大元 *maximal element* と呼ばれる。また任意の $x \in S$ に対して、 $x \leq s$ ならば $s = x$ が成り立つとき、 s は S の極小元 *minimal element* と呼ばれる。また任意の $x \in S$ に対して $x \leq s$ が成り立つとき、 s は S の最大元 *maximum element* と呼ばれる。また任意の $x \in S$ に対して $s \leq x$ が成り立つとき、 s は S の最小元 *minimum element* と呼ばれる。

事実 9.22. $(S, \leq)$ の最大元, 最小元は存在するならば一意である。また $(S, \leq)$ の最大元, 最小元はそれぞれ $(S, \leq)$ の極大元, 極小元でもあるが、逆は必ずしも成り立たない。 $(S, \leq)$ の部分順序集合 $(M, \leq_M)$ に最大元が存在するならば、それは $(M, \leq_M)$ の上限でもある。しかし逆は必ずしも成り立たない。

例 9.23. $\mathbb{R}$ をすべての実数の集合, $\mathbb{Z}^+$ はすべての正整数の集合とする. $\leq$ は $\mathbb{R}$ 上の大小関係とする. $M = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ とし, $\leq_M$ は $\leq$ を M 上に制限した順序関係とする. このとき $(M, \leq_M)$ の上限は 1 である. しかし 1 は M に属していないので, M の最大元ではない.

定義 9.24 (整列集合). $(S, \leq)$ が全順序集合であり, かつ S の任意の部分順序集合 $(M, \leq_M)$ に最小元が存在するとき, S を整列集合 *well-ordered set* と呼ぶ.

例 9.25. (1) 自然数の集合 $\mathbb{N}$ とその上の大小関係 $\leq$ に対して, $(\mathbb{N}, \leq)$ は整列集合である. しかし有理数の集合 $\mathbb{Q}$ とその上の大小関係 $\leq$ に対して, $(\mathbb{Q}, \leq)$ は整列集合ではない. たとえば $(\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x\}, \leq)$ が最小元を持たない $(\mathbb{Q}, \leq)$ の部分順序集合である.

定義 9.26 (同値関係). S 上の二項関係 $\sim$ が反射性, 対称性, 推移性を持つとき, $\sim$ は S 上の同値関係 *equivalent relation* であるという.

例 9.27. 任意の $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$x \equiv_3 y \iff x \text{ を } 3 \text{ で割った余りと } y \text{ を } 3 \text{ で割った余りが等しい}$$

が成り立つとする. このとき $\equiv_3$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係である.

定義 9.28 (同値類). $\sim$ は集合 S 上の同値関係であるとする. このとき, 任意の $x \in S$ に対して, $[x]_\sim = \{y \in S \mid x \sim y\}$ と定め, これを x の $\sim$ による同値類 *equivalent class* と呼ぶ. また

$$S/\sim = \{[x]_\sim \mid x \in S\}$$

によって定められる集合 $S/\sim$ を, S の $\sim$ による商集合 *quotient set* と呼ぶ.

事実 9.29. $\sim$ は集合 S 上の同値関係であるとする. このとき任意の $x, y \in S$ に対して,

$$[x]_\sim = [y]_\sim \iff x \sim y$$

が成り立つ.

定義 9.30 (関数). $A \times B$ の部分集合 f で, 次の二つの条件を満たすものを A から B への関数 *function* または写像 *mapping, map* と呼ぶ.

- (1) 任意の $a \in A$ に対して, ある $b \in B$ が存在して $\langle a, b \rangle \in f$.
- (2) 任意の $a \in A, b, b' \in B$ に対して, $\langle a, b \rangle \in f$ かつ $\langle a, b' \rangle \in f$ ならば, $b = b'$.

言い換えると A の各要素 a に対して, $\langle a, b \rangle \in f$ なる B の要素 b が唯一つ存在するとき $f \subseteq A \times B$ は関数である.

f が A から B への関数であることを $f: A \rightarrow B$ によって表す. またこのとき A を f の始領域 *domain*, B を f の終領域 *codomain* と呼ぶ. $a \in A, b \in B$ に対して $\langle a, b \rangle \in f$ であるとき, b を $f(a)$ と表す.

始領域が直積集合 $A_1 \times A_1 \times \dots \times A_n$ である場合, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in A_1 \times A_1 \times \dots \times A_n$ に対して, $f(\langle a_1, \dots, a_n \rangle)$ は通常 $f(a_1, \dots, a_n)$ と表記される.

例 9.31. $\mathbb{Z}$ によってすべての整数からなる集合を表わし, $\mathbb{Q}$ によってすべての有理数からなる集合を表わす. このとき $f: \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Q}, f(x, y) = \frac{x}{y}$ と定めると f は $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ を始領域として持ち, $\mathbb{Q}$ を終領域として持つ一つの関数である. しかし $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x, y) = \frac{x}{y}$ と定めると, 例えば $\langle 1, 0 \rangle$ は始領域の要素であるが, 終領域に $f(1, 0)$ に対応する要素が存在しないので, これは関数の定義として失敗していることになる.

定義 9.32 (恒等関数). 任意の集合 A に対して,

$$id_A(a) = a \quad (\forall a \in A)$$

によって定められる関数 $id_A: A \rightarrow A$ を A 上の恒等関数 *identity function* と呼ぶ.

定義 9.33 (関数の合成). $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ は関数であるとする. このとき $g \circ f: A \rightarrow C$ を次のように定義する.

$$g \circ f(a) = g(f(a)) \quad (\forall a \in A)$$

$g \circ f$ を f と g の合成 *composition* と呼ぶ.

定義 9.34 (像, 逆像). 関数 $f: A \rightarrow B$ と A の部分集合 M に対して, 集合 $\{f(x) \in B \mid x \in M\}$ を M の f による像 *direct image* とよび, $f[M]$ によって表す. また B の部分集合 N に対して, 集合 $\{x \in A \mid f(x) \in N\}$ を N の f による逆像 *inverse image* と呼び, $f^{-1}[N]$ によって表す.

事実 9.35. 任意の写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$ に対して以下の事実が成り立つ.

- $id_B \circ f = f = f \circ id_A$
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- $g \circ f[M] = g[f[M]] \quad (\forall M \subseteq A)$
- $(g \circ f)^{-1}[M] = f^{-1}[g^{-1}[M]] \quad (\forall M \subseteq C)$
- $f[M \cap M'] = f[M] \cap f[M'], f[M \cup M'] = f[M] \cup f[M'] \quad (\forall M, M' \subseteq A)$
- $f^{-1}[M \cap M'] = f^{-1}[M] \cap f^{-1}[M'], f^{-1}[M \cup M'] = f^{-1}[M] \cup f^{-1}[M'] \quad (\forall M, M' \subseteq B)$

定義 9.36 (単射, 全射, 全単射). 関数 $f: A \rightarrow B$ が, 任意の $x, y \in A$ に対して,

$$f(x) = f(y) \text{ ならば } x = y$$

を満たすとき, f は単射 *injection* または一对一の写像 *one-to-one mapping* であるという.

また任意の $x \in B$ に対して $y \in A$ が存在して,

$$f(y) = x$$

を満たすとき f は全射 *surjection* または上への写像 *onto mapping* であるという.

f が全射でありかつ単射であるとき, f は全単射 *bijection* であるという.

定義 9.37 (集合族の直積). 集合族 $(S_i)_{i \in I}$ に対して $(S_i)_{i \in I}$ から $\bigcup_{i \in I} S_i$ への関数 f で

$$f(S_i) \in S_i$$

を満たすものすべてからなるものの集合を $(S_i)_{i \in I}$ の直積と呼び

$$\prod_{i \in I} S_i$$

によって表わす.

集合族 $(S_i)_{i \in I}$ が空集合を含む場合, $\prod_{i \in I} S_i$ も空集合になる. 逆に集合族 $(S_i)_{i \in I}$ が空集合を含まない場合には一般に $\prod_{i \in I} S_i$ は空集合にならないということが仮定される. この仮定は選択公理 *the axiom of choice* と呼ばれる.

事実 9.38. 任意の関数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ に対して, 以下が成り立つ.

- f, g がともに単射 (全射) ならば $g \circ f$ も単射 (全射).
- $g \circ f$ が単射ならば f も単射.
- $g \circ f$ が全射ならば g も全射.
- f が単射ならばある $h: B \rightarrow A$ が存在して $h \circ f = id_A$.
- f が全射ならばある $h: B \rightarrow A$ が存在して $f \circ h = id_B$ (選択公理を使っていることに注意).