ハイティング代数

久木田水生

Cate 研 2011 年 2 月 18 日

ハイティング代数（Heyting algebra）は束（lattice）の一種であり，以下の数学的構造と密接な関係を持っている．

- 直観主義命題論理の理論
- 単純型理論
- デカルト閉圏（cartesian closed category）
- 位相空間の開集合系

1　束

Definition 1.1 (束)**.** 順序集合 $(L, \leq)$ が**束**であるのは，任意の $x, y \in L$ に対して $\{x, y\}$ の L における上限および下限が存在するときである．これらはそれぞれ x と y の**結び** *join* および**交わり** *meet* と呼ばれる．

しばしば単に L によって束 $(L, \leq)$ に言及する．結びと交わりはそれぞれ $x \vee y$，$x \wedge y$ と表記される．また L に最大元，最小元が存在するときはそれぞれ 1，0 によって表す．

Example 1.2. (1) 任意の集合 S に対して $(\mathfrak{P}(S), \subseteq)$ は束である．
(2) 任意の全順序集合は束である．

Exercise 1.3. Example 1.2 (1)(2) において，結びと交わりが何かを考えよ．

Lemma 1.4. L は束，$x, y, z \in L$ とする．このとき以下が成り立つ．

1. $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$（交換律）
2. $x \wedge x = x = x \vee x$（冪等律）
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$（結合律）
4. $x \wedge (x \vee y), x \vee (x \wedge y)$（吸収律）
5. $x \leq y \iff x \wedge y = x \iff x \vee y = y$
6. $y \leq z \Longrightarrow x \wedge y \leq x \wedge z$ かつ $x \vee y \leq x \vee z$（単調性）
7. $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$
8. $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
9. $x \leq z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$

Proof. 練習問題とする． □

Exercise 1.5. Lemmma 1.4 を証明せよ．

Definition 1.6 (分配束，モジュラー束，完備束)**.** L は束とする．

(1) L が**分配的** *distributive* であるのは，任意の $x, y, z \in L$ に対して $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ が成り立つときである．この条件はまた $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$ が成り立つことに等しい．

(2) L が**モジュラー** *modular* であるのは任意の $x, y, z \in L$ に対して，$x \leq z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ が成り立つときである．

(3) L が**完備** *complete* であるのは，任意の $M \subseteq L$ に対して M の上限が L の中に存在するときである．この条件はまた任意の $M \subseteq L$ に対して M の下限が L の中に存在することに等しい．

Exercise 1.7. (1) Example 1.2 (1) が分配的かつ完備であることを示せ．

(2) Example 1.2 (2) が分配的であることを示せ．また完備な全順序と完備でない全順序の例を挙げよ．

(3) 束 L が完備であるならば，L に最小元と最大元が存在すること，および任意の $M \subseteq L$ に対して M の下限が L の中に存在することを示せ．

Lemma 1.8. 任意の束に対して以下の条件 (i)-(iii) は同値である：

(i) 任意の $x, y, z \in L$ に対して $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(ii) 任意の $x, y, z \in L$ に対して $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(iii) 任意の $x, y, z \in L$ に対して $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee z$

Proof. 以下で等式の右に示されるアラビア数字は Lemmma 1.4 の等式の番号を参照している．交換律，冪等律，結合律は断りなく使う．

(i)$\Longrightarrow$(ii):

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \qquad (\because \text{(i)}) \\ &= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \qquad (\because \text{(i)}) \\ &= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) \qquad (\because\ ) \\ &= x \vee (y \wedge z) \qquad (\because 4)\end{aligned}$$

(ii)$\Longrightarrow$(iii):

$$\begin{aligned}x &\leq x \vee z \\ x \wedge (y \vee z) &\leq (x \vee z) \wedge (y \vee z) \qquad (\because 6) \\ &= (x \wedge y) \vee z \qquad (\because \text{(ii)})\end{aligned}$$

(iii)$\Longrightarrow$(i):

$$\begin{aligned}x \wedge (y \vee z) &\leq (x \wedge y) \vee z \qquad (\because \text{(iii)}) \\ x \wedge (x \wedge (y \vee z)) &\leq x \wedge ((x \wedge y) \vee z) \qquad (\because 6) \\ (x \wedge x) \wedge (y \vee z) &\leq x \wedge (z \vee (x \wedge y)) \\ x \wedge (y \vee z) &\leq (x \wedge z) \vee (x \wedge y) \qquad (\because \text{(iii)})\end{aligned}$$

$\square$

2 ハイティング代数

Definition 2.1 (相対擬補元)**.** L は束であり，$x, y \in L$ とする．x の y に対する**相対擬補元** *relative pseudo-complement*, $x \Rightarrow y$, とは，L の部分集合 $\{z \in L : z \wedge x \leq y\}$ の最大元である．

Exercise 2.2. L は束とする．任意の $x, y, z \in L$ に対して，次の (i)(ii) が同値であることを証明せよ：

(i) z は x の y に対する相対擬補元.

(ii) 任意の $w \in L$ に対して $w \leq z \iff w \wedge x \leq y$.

Definition 2.3 (ハイティング代数)**.** L は束であるとする．L が**ハイティング代数** *Heyting algebra* であるのは，任意の $x, y \in L$ に対して x の y に対する相対擬補元が存在するときである．

Lemma 2.4. H はハイティング代数であり，$x, y, z \in H$ とする．このとき以下が成り立つ：

1. $y \leq x \Rightarrow y$.
2. $x \leq x', y' \leq y$ ならば $x' \Rightarrow y' \leq x \Rightarrow y$.
3. $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$.
4. $(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$.
5. $(x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z) \leq (x \wedge y) \Rightarrow z$.
6. $(x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow z) \leq x \Rightarrow (y \vee z)$

Proof. 練習問題とする． □

Exercise 2.5. Lemma 2.4 を証明せよ．

Proposition 2.6. (i) ハイティング代数は分配的である．

(ii) 任意の有限分配束はハイティング代数である．

(iii) 無限分配律を満たす完備束はハイティング代数である．

Proof. H はハイティング代数であるとする．

(i) $x, y, z \in H$ を考える．Lemma 2.4 より

$$(x \Rightarrow (x \wedge y)) \vee (x \Rightarrow (x \wedge z)) \leq x \Rightarrow ((x \wedge y) \vee (x \wedge z))$$

$y \wedge x \leq x \wedge y$ より $y \leq x \Rightarrow (x \wedge y)$．同様に $z \leq x \Rightarrow (x \wedge z)$．従って $y \vee z \leq (x \Rightarrow (x \wedge y)) \vee (x \Rightarrow (x \wedge z))$．よって

$$y \vee z \leq x \Rightarrow ((x \wedge y) \vee (x \wedge z))$$

従って $x \wedge (y \vee z) \leq x \wedge (x \Rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

(ii) L は有限分配束，$x, y \in L$ とする．L が有限だから $\{z \in L : z \wedge x \leq y\}$ も有限である．そこでこの集

合を $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ とする．$a = \bigvee_{0 \le i \le n} a_i$ とする．このとき

$$\begin{aligned} x \wedge a &= x \wedge \bigvee_{0 \le i \le n} a_i \\ &= \bigvee_{0 \le i \le n} x \wedge a_i \\ &\le y \end{aligned}$$

したがって $a \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ であり，a は $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ の最大元．よって a は x の y に対する相対擬補元である．よって L はハイティング代数．(iii) L は無限分配律を満たす完備束であるとする．$x, y \in L$ とする．L が完備だから $\{z \in L : z \wedge x \le y\}$ には上限が存在する．その上限を a とする．このとき

$$\begin{aligned} x \wedge a &= x \wedge \bigvee \{z \in L : z \wedge x \le y\} \\ &= \bigvee \{x \wedge z : z \in L, z \wedge x \le y\} \\ &\le y \end{aligned}$$

したがって $a \in \{z \in L : z \wedge x \le y\}$ であり，a は $\{z \in L : z \wedge x \le y\}$ の最大元．よって a は x の y に対する相対擬補元である．よって L はハイティング代数． □

Definition 2.7 (ブール代数)**.** L は分配束であるとする．任意の $x \in L$ に対して，以下の条件 (i)(ii) を満たす元 $-x$ を x の**補元** *complement* または**逆元** *inverse* と呼ぶ：

(i) $x \wedge -x = 0$
(ii) $x \vee -x = 1$

任意の $x \in L$ に対して補元が存在するとき，L は**ブール代数** *Boolean algebra* と呼ばれる．

Exercise 2.8. 以下を示せ．

(1) 補元は存在するならば一意である．
(2) $-(x \wedge y) = -x \vee -y, -(x \vee y) = -x \wedge -y$
(3) 任意のブール代数はハイティング代数である．
(4) H はハイティング代数で最小元を持つとする．任意の $x \in H$ に対して $(x \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 \le x$ が成り立つならば H はブール代数であり，$-x = x \Rightarrow 0$.