条件文の論理

久木田水生*

関西学院大学 2012 年度

はじめに

このテキストは関西学院大学大学院文学研究科 2012 年度秋学期哲学特殊講義のために作成された資料である．本講義の目的は記号論理学が条件文をどのように特徴づけてきたかを概観することである．

条件文あるいは含意文は論理学において中心的な重要性を持つものであり，その特徴づけに関してはこれまでに様々な方法が提案されてきた．ここでは特に古典論理，様相論理，直観主義論理による特徴づけを見て，それぞれの問題点について考察する．また時間があれば条件文についての理解が数学の哲学においてどのような意義を持つかについても考察する．

以下のテキストを書く際に主に参照した文献は G. Priest, *An Introduction to Non-Classical Logic* である．本テキストでは条件文を特徴づける論理のうちのごく一部（古典論理，様相論理，直観主義論理）しか扱われていないが，この本では他にも様々な論理が詳細に紹介されているほか，それらが提案された歴史的な経緯や，各論理のタブローによる特徴づけとその完全性もカバーされている．また第二版では命題論理のみならず述語論理も含まれ，他に類を見ない包括的な非古典論理大全といった趣を呈している．様相論理に関しては小野寛晰『情報科学における論理』も参照した．また直観主義論理の手続き的な解釈に関しては Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory* を参照した．

* minao.kukita@gmail.com

1　序

1.1　文の意味とは何か

条件文の意味について考察するのがこの授業の目的である．さて一般にある文の意味とは何なのだろうか？このことを説明するのは哲学における最大のテーマの一つである．この授業ではこのテーマに深入りすることは避けて，いくつかの立場を紹介するだけにとどめる．

1. 外延主義：文の意味はその文が持つ真理値だとする立場．例えば「地球は太陽より小さい」という文は真という真理値を意味として持ち，「地球は太陽より大きい」は偽という真理値を意味として持つ．フレーゲの Bedeutung についての理論は外延主義をとっている．また前期ウィトゲンシュタインも外延主義をとる．外延主義においては真なる文はすべて同じ意味を持つ．従って例えば「地球は太陽より小さい」も「水は水素と酸素からできている」もどちらも同じ意味（すなわち真という真理値）を持つことになる．
2. 内包主義：文の意味はその文を聞く（読む）ときに私たちが理解することであるとする立場．この立場においては同じ真理値を持つ文でも異なる意味を持ちうる．一般に内包は外延を一意的に決定する．外延主義よりも内包主義の方が，意味というものについての私たちの直観的な理解に近いように思われる．しかしある文を聞いた（読んだ）時に私たちが理解していることが何なのかということを問われると，それに答えることは困難である．フレーゲの Sinn は内包としての意味であると考えられる．フレーゲによれば私たちは文の Sinn を通じてその Bedeutung（すなわち真理値）に到達する．
3. 真理条件的意味論：文の意味はその文が真になるための必要十分条件であるとする立場．この意味論は通常，論理学や数学の形式的な言語（対象言語）に適用され，真理条件を述べる際に使われる日常言語（メタ言語）の意味についてはすでに理解されていることを前提としている．
4. 検証主義：文の意味はその文が検証されるための必要十分条件であるとする立場．この立場では文というものは原理的に検証可能でなければならず，そうでない文は無意味とされる．例えば「この世界は最良の世界だ」というような文はその検証条件が明らかでなく，従って検証可能ではない．
5. 意味使用説：文の意味は実践における使用によって決定されるとする立場．後期ウィトゲンシュタインはこの立場をとる．文の意味は，それが何を含意するか，それがどのような根拠に基づいて主張されうるかによって決定されるとする，推論主義も意味使用説の一派と言えるだろう．

どのような意味理論をとるかによっても条件文の解釈が変わってくるため，この講義では特定の意味理論にコミットすることはしない．

1.2　条件文とは何か

条件文とは「A ならば B」という形式の文であり，A という条件の下では B が成り立つということを表現する．日常言語では「A とすれば B」，「A だったら B」など，条件文を表現する様々な仕方がある．私たちは日常的に様々な場面で条件文を使っている．たとえば「テストで 60 点とれば単位が取れる」，「お酒を飲んだら運転をしてはいけない」，「雨が降った場合は遠足を中止する」などなど．

この「…ならば…」のように，いくつかの文（大抵は一つか二つ）と結び付いて，より複合的な文を作る表現を，論理学では**結合子**と呼ぶ．論理学において標準的に使われる結合子は「…でない」，「…かつ…」，「…ま

たは…」などがある．これらを使って作られた文をそれぞれ**否定**，**連言**，**選言**という．論理学において結合子は記号によって表わされる．標準的には以下の記号がつかわれる．

- A でない：$\neg A$
- A かつ B：$A \wedge B$
- A または B：$A \vee B$
- A ならば B：$A \to B$

なお「A ならば B」における A と B はそれぞれ，この条件文の**前件**および**後件**と呼ばれる．

これらの中でも条件文は論理学において特別な重要性を持っている．というのも論理学は正しい推論を特徴づけることを目的として持ち，そして条件文「A ならば B」が真であるということは一般に A から B への推論が正しいということを意味するからである[*1]．従って条件文をどのように特徴づけるかという問題は，どのような推論を正しいものとして受け入れるかという問題に直結するのである．

その一方で条件文の意味を説明することには，他の種類の文にはない困難がある．比較のために連言の意味がどのように説明されるかを考えよう．例えば「ドクはマーティの手紙を読んでおり，かつドクは防弾チョッキを着ていた」という文を考える．この文は端的に事実を報告したものであり，ここでの「かつ」の役割は，「ドクはマーティの手紙を読んでいた」と「ドクは防弾チョッキを着ていた」の両方が正しいということを表現することである．文の意味を真理条件としてとらえるならば，「A かつ B」という文の意味は，A と B の両方が真であることである（A と B の真理条件はすでに理解されているものとする）．一方で「ドクがマーティの手紙を読んでいなかったらドクは暴漢の襲撃によって命を落としていただろう」という文は，いわゆる反事実的条件文であり，この世界の事実を端的に描写したものではない．このような文が真である（あるいは偽である）というのはどのように説明されるべきなのだろうか．これらは前件と後件の真偽に還元されるのだろうか，もしそうだとすればそれはどのようにしてだろうか．こういった問題について考えるのがこの講義の目的である．

1.3 推論の種類

論理学とは正しい推論を特徴づけることを目的とする．推論とは通常いくつか前提から一つの結論を導き出すことである．ある推論が正しいということは，その前提のすべてが成り立つ時には結論も成り立つということと理解される．

推論の中にはいくつかの種類がある．まずすべての推論は**必然的推論**と**蓋然的推論**に分けられる．ある推論が必然的であるというのは，前提のすべてが成り立っている時には必ず結論も成り立つということである．一方，ある推論が蓋然的であるというのは前提のすべてが成り立つときには高い確率で結論が成り立つということである．ただしどの程度の確率であれば高いと言えるのかは状況に依存し，また多分に主観的なものである．ここでは蓋然的推論は単に必然的推論ではないという意味で使うことにする．

例えば次の推論は必然的である．

(1.1)　前提　A は B の親である．
　　　——————————
　　　結論　B は A の子である

一方，次の推論は蓋然的である．

[*1] ただし例外も存在する．

(1.2) 前提 1　X は Z の父親である．
前提 2　Y は Z の母親である．

結論　X と Y は夫婦である．

ある推論が必然的であるかどうかは，その推論の前提がすべて成り立つが，結論は成り立たないような状況がありうるかどうかによって判定できる．そのような状況をその推論に対する**反例**という．例えば上の例では X と Y が結婚せずに Z を産んだ，あるいは結婚していたが Z を産んでから離婚したというような状況が考えられる．このような状況では前提は成り立つが結論は成り立たない．

必然的推論の中には**論理的**な推論とそうでないものがある．上にあげた必然的推論は「親」と「子」という特定の言葉の意味に依存している．従ってこれらの語を他の語に置き換えたときにはこの推論の必然性は失われる．一方で次のような推論を考えよう．

(1.3) 前提 1　すべての哺乳類は授乳する．
前提 2　鯨は哺乳類だ．

結論　鯨は授乳する．

この推論の正しさは「哺乳類」，「授乳する」，「鯨」などの言葉の意味には依存していない．従ってこれらの言葉を他の（文法的に適切な）語に置き換えてもこの推論は必然性は失われない．このようにそこに現れる言葉の意味に依存しない必然的推論を論理的推論と呼ぶ．論理的推論は**妥当な推論**あるいは**演繹（的推論）**とも呼ばれる．

蓋然的な推論の中にもいくつかの種類がある．個別的な事例から一般法則を推測する**帰納**，観察された現象に対して，それを説明する理由を推測する**アブダクション**，ある対象（のクラス）について成り立つことを別の対象（のクラス）についても成り立つと推測する**類推**などである．例えば以下のような推論がこれらの例にあたる．

(1.4) 前提 1　ジャンはフランス人でありかつジャンはワインが好きだ．
前提 2　ピエールはフランス人でありかつピエールはワインが好きだ．
前提 3　ギュスターヴはフランス人でありかつギュスターヴはワインが好きだ．

結論　フランス人はワインが好きだ．

(1.5) 前提 1　太郎がドーピングをすれば素晴らしい記録を出せる．
前提 2　太郎は素晴らしい記録を出した．

結論　太郎はドーピングをした．

(1.6) 前提　ネズミにとってダイオキシンは猛毒だ．

結論　人間にとってダイオキシンは猛毒だ．

この講義においては，特に断りがなければ推論といえば妥当な推論を意味するものとする．

Exercise 1.1. 以下の推論を妥当な推論，必然的だが妥当ではない推論，蓋然的推論に分類しなさい．また蓋然的であればその反例をあげなさい．

1. 太郎は次郎よりも背が高く，次郎は三郎よりも背が高い．したがって太郎は三郎よりも背が高い．
2. 太郎は花子の兄である．よって花子は太郎の妹である．

3. ジョンとピーターは同じ国籍を持つ．ピーターとディヴィッドは同じ国籍を持つ．ゆえにジョンとディヴィッドは同じ国籍を持つ．
4. 車を運転するには免許が必要だ．自転車も車の一種である．よって自転車を運転するには免許が必要だ．
5. 学生はすべて文化系のクラブか運動系のクラブに属している．太郎は文化系のクラブに属している．従って太郎は運動系のクラブには属していない．

1.4 妥当な推論の特徴づけ

論理学においては妥当な推論を特徴づけるのには，大きく言って二つの方法がある．その一方は**証明論**によるものであり，もう一方は**意味論**によるものである．証明論とはいくつかの形式的な規則を定めておいて，その規則を適用することによって導出することのできる推論が正しい推論であるとする方法である．一方で意味論においては，文の意味が数学的な方法によって定義され，それによって決定される真偽の概念に基づいて妥当な推論が特徴づけられる．このテキストにおいては主に意味論に基づく妥当性の概念を取り扱うが，ところどころで証明論についても言及する．

なお論理学はその対象とする文の種類によって**命題論理**，**述語論理**，**様相論理**などに分類されるが，ここで扱うのは主に命題論理である．命題論理は文の内部の構造（主語－述語構造など）には立ち入らず，もっぱら上述した結合子の振る舞いだけを対象とする．命題論理における妥当な推論には例えば

(1.7)
前提	A または B ならば C
結論	C でないならば A でないか B でないかのどちらかである

といったものがある．ここでは A と B は任意の文である．

述語論理は文を述語と項（名詞句のような働きをする表現）に分析し，「すべての P は Q である」，「P であるような Q が存在する」などの表現を扱う．ここでの P と Q は文ではなく述語である．述語論理における妥当な推論には例えば

(1.8)
前提	すべての P は Q である
結論	Q でない P は存在しない

といったものがある．

様相論理は必然性や可能性の概念を扱い，「必ず A」，「B ということがありうる」といった表現を扱う．様相論理における妥当な推論には例えば

(1.9)
前提	必ずしも A という訳ではない．
結論	A でないということがありうる．

といったものがある．

1.5 構文論

以下において私たちは主に記号化された形式言語を扱う．形式言語を定義するための規則を**構文論**という．ここでは命題論理の構文論を提示する．

命題論理が扱う対象は文と結合子である．以下では形式的に定義された文のことを**論理式**または単に**式**と呼ぶ．論理式は以下の二つの規則によって定義される．

1. $p, q, r, p_1, q_1, r_1, \ldots$ は論理式である．これらは**原子式**と呼ばれる
2. A, B が論理式であるとき，$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ は論理式である．これらはそれぞれ**否定**，**連言**，**選言**，**条件文**と呼ばれる．またこれらをまとめて**複合式**と呼ぶこともある．
3. 上記の二つの規則によって論理式であると定まるものだけが論理式である．

すべての式からなる集合を **Form** によって表わすことにする．また特に原子式の集合を **Atom** によって表わす．

この定義によって $(\neg p_3 \wedge r), (r_2 \to (q_5 \vee \neg\neg p))$ などは論理式であると分かる．一方で $p\neg, (q\wedge), (q_1 \to r$ などは論理式ではない．

括弧は論理式の構造を曖昧さのない形で提示するために付けられるものである．例えば $p \wedge q \vee r$ と書いてしまうと $(p \wedge (q \vee r))$ と $((p \wedge q) \vee r)$ のどちらなのかが分からなくなってしまう．しかし一番外側の括弧は書かなくても誤解されることはないので，以下では論理式の一番外側の括弧は通常省略して書くことにする．また算数において $x + y \times z$ と書いた時には $x + (y \times z)$ と読むように，私たちは $\wedge, \vee, \to$ の順番で優先的に結合するものと考える．従って例えば $p \to q \wedge r \vee p$ は $(p \to ((q \wedge r) \vee p))$ の省略である．また同じ結合子同士では右側にあるものが優先的に結合される．従って例えば $p \to q \to r$ は $(p \to (q \to r))$ の略である．

Exercise 1.2. 以下の論理式において省略されている括弧を復元しなさい．

1. $\neg p \to q \wedge r \to q$
2. $\neg q \vee r \vee p \to \neg q \wedge r \vee p$
3. $p \wedge q \to r \vee \neg q \to p \vee r \wedge q \wedge r$

Exercise 1.3. 以下の論理式の括弧を可能な限り省略しなさい．

1. $(((p \vee q) \to r) \to ((p \to r) \wedge (q \to r)))$
2. $((\neg p \to q) \to ((\neg p \to \neg q) \to p))$
3. $(((p \to q) \to p) \to p)$
4. $(\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q))$
5. $((p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q)))$
6. $((p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$

2　実質含意——古典論理における条件文

この節では古典論理における条件文の意味について説明する．古典論理は 19 世紀末にドイツの数学者・哲学者ゴットロープ・フレーゲによって確立された論理であり，ある意味では最も標準的な論理体系である．

2.1　古典命題論理の意味論

$p, q_1, q_5 \to r_2$ などの式はこれだけでは何の意味もないただの記号である．私たちはこれらの記号を解釈する方法を与える．その際に古典論理では二つの重要な単純化を行う．それは「すべての文は真か偽のどちらかである」という原理を採用することである．これは**二値原理**と呼ばれている．以下，文の真偽のことをその文の**真理値**と呼ぶ．私たちは真偽の真理値をそれぞれ 1 と 0 によって表わす．もう一つは，文に関してその真理値以外のことを一切考慮しないということである．これを文に関する**外延主義**と呼ぶ．

私たちの言語において意味を持つ対象は論理式のみである．

Definition 2.1 (解釈)**.** すべての式から真理値への関数 f が以下の条件を満たすとき，f は**古典的解釈**と呼ばれる：任意の式 A, B に対して

1. $f(\neg A) = 1 \iff f(A) = 0$
2. $f(A \wedge B) = 1 \iff f(A) = 1$ かつ $f(B) = 1$
3. $f(A \vee B) = 1 \iff f(A) = 1$ または $f(B) = 1$
4. $f(A \to B) = 1 \iff f(A) = 0$ または $f(B) = 1$

本節では古典的解釈を単に解釈と呼ぶことにする．$v, v', \ldots$ によって解釈を表わすことにする．任意の原子式の集合 S に対して v_S は S に属する原子式に 1 を与え，それ以外のすべての原子式に 0 を与える解釈であるとする．例えば $v_{\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}}$ は $P_1, P_2, \ldots, P_n$ に 1 を与え，それ以外に偽を与える解釈である．任意の解釈 v と任意の原子式 P に対して，$v[P]$ は原子式 P に 1 を与え，それ以外の原子式には v と同じ値を与える解釈であるとする．同様に $v[\neg P]$ は原子式 P に 0 を与え，それ以外の原子式には v と同じ値を与える解釈であるとする．

Exercise 2.2. 解釈は原子式への値の割り当てによって一意的に決定されることを示せ．すなわち任意の原子式 P に対して $v(P) = v'(P)$ を満たす解釈 v, v' は互いに等しいことを示せ．

Definition 2.3 (論理的帰結，トートロジー)**.** $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ は式であるとする．任意の解釈 v に対して $v(A_1) = v(A_2) = \cdots = v(A_n) = 1$ であるならば $v(B) = 1$ であるとき，B は $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の**論理的帰結**であるといい，

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

と書く．

また任意の解釈 v に対して $v(B) = 1$ であるとき，B を**トートロジー**といい，

$$\models B$$

と書く．

また任意の解釈 v に対して $v(A) = v(B)$ であるとき，A と B は**論理的に同値**であるといい，

$$A \simeq B$$

と書く．

Example 2.4. 以下が成り立つ．ただし以下において Γ, Δ は任意の論理式の列（空列も含む）を表わすものとする．また $\Longrightarrow$ は左辺が右辺の十分条件になっていることを，$\Longleftrightarrow$ は左辺と右辺が互いに必要十分条件になっていることを表わす．

1. $\Gamma, A, B, \Delta \models C \Longrightarrow \Gamma, B, A, \Delta \models C$
2. $\Gamma \models A \Longrightarrow \Gamma, B \models A$
3. $\Gamma, A, A \models B \Longrightarrow \Gamma, A \models B$
4. 二重否定律：$\models \neg\neg A \to A$
5. 背理法：$A \to B, A \to \neg B \models \neg A$
6. $A, B \models A \wedge B$
7. $A_1 \wedge A_2 \models A_i$ $(i = 1, 2)$
8. $A_i \models A_1 \vee A_2$ $(i = 1, 2)$
9. 構成的ジレンマ，両刀論法：$A \vee B, A \to C, B \to C \models C$
10. 演繹定理：$A \models B \Longleftrightarrow \models A \to B$
11. モードゥス・ポネンス：$A \to B, A \models B$
12. 同一律：$A \models A$
13. 排中律：$\models A \vee \neg A$
14. 矛盾律：$\models \neg(A \wedge \neg A)$
15. $\models A \to (B \to A)$
16. 爆発原理：$\models \neg A \to (A \to B)$
17. ゲーデルの法則：$\models (A \to B) \vee (B \to A)$
18. $\models (A \to B) \vee (B \to C)$
19. パースの法則：$\models ((A \to B) \to A) \to A$

Exercise 2.5. 例 2.4 が成り立つことを確かめなさい．

2.2 実質含意のパラドクス

前節において私たちは古典論理の意味論によって結合子の意味がどのように定められるかを見た．特に古典論理において定義される条件文は**実質含意** *material implication* と呼ばれている．実質含意の性質は，それがどのような論理的帰結の関係を満たすかによって決定される．私たちは例 2.4 において，実質含意が満たす様々な性質を見た．そしてそれらは成り立つのが自然な性質に思われる．例えば 2.4 の 11 の意味を考えてみよう．これは A ならば B と，A から，B が帰結するということを述べている．これは最も基本的な推論規則の一つであり，条件文が当然従うべき規則である．

しかしながら実質含意には，必ずしも自然とは言えないような性質もある．例えば例 2.4 の 15 を考えよう．これが述べているのはある文が真であれば，その文を後件に持つ任意の文が真であるということである．従っ

て例えば「日本の首都が東京ならば，このコインを投げて表が出れば日本の首都は東京だ」が真であることになる．そして実際に「日本の首都は東京だ」は真であるから，モードゥス・ポネンスより「このコインを投げて表が出れば日本の首都は東京だ」は真である．しかしこれを真であるとみなすのは不自然に思われる．

この問題と表裏をなすのが例 2.4 の 16 である．これが述べているのはある文の否定が真であれば（従ってその文が偽であれば），その文を前件とする任意の条件文が真だということである．例えば「村上春樹はノーベル文学賞を受賞していない」は真なので，「村上春樹がノーベル文学賞を受賞していれば，阿部寛はアカデミー賞を受賞する」は真である．同様に例 2.4 の 17-19 にも不自然なところがある．これらが**実質含意のパラドクス**と呼ばれるものである．

こういった不自然さの原因は主として，古典論理が文の内容を一切無視してその真理値のみに注目しているという点（外延性原理），および古典論理においては文は真か偽のどちらか一方（そして一方だけ）の真理値をとるという点（二値原理）にある．複合的な表現の意味が，その構成部分の意味によって決定されるということは古典論理に限らず一般に受け入れられている．これを**合成原理**と呼ぶ．古典論理の条件文（実質含意）の不自然さは，外延性原理と二値原理，そして合成原理からの必然的帰結である．この点を説明しよう．

まず条件文の意味とはその真理値である（外延性原理）．そしてその真理値は真か偽のいずれかでなければならない（二値原理）．文の意味はその部分の意味から決定される（合成原理）だから，条件文 $A \to B$ の意味（真理値）はその構成部分である A と B の意味から決定されなければならない．A と B の意味もまたその真理値に他ならないのだから，結局，条件文の意味を決定する際に，私たちがやらなければならないことは，A と B の真理値の組み合わせのそれぞれに対して $A \to B$ の真理値を決定すること，つまり以下の表の空欄 (1)-(4) を真か偽の値で埋めることである．

A	B	$A \to B$
真	真	(1)
真	偽	(2)
偽	真	(3)
偽	偽	(4)

ではどのようにこれらの空欄を埋めていったらよいか．まず最も確実なのは A が真で B が偽の時には $A \to B$ が真になることはないということである．たとえばある教員に「テストで 60 点以上とれたら単位を与える」といわれ，実際にテストで 60 点以上とったのに単位がもらえなかったら，私たちはその教官を嘘つきだとみなす．従って (2) には偽が入らなければならない．また (1)(4) もそれほど問題はないように思われる．もしあなたがテストで 60 点以上とって，そして実際に単位がもらえたら，あなたはその教官の言ったことが本当だったと考えるだろう．またあなたがテストで 60 点以上取れなくて単位がもらえなくても，教官の言ったことが本当だったと考えるはずである．従って (1)(4) には真を入れるのが適当に思われる．難しいのは (3) である．あなたは 60 点以上取れなかった，しかし教官はあなたに単位を与えた．この場合，教官の言ったことは虚偽になるのだろうか．そのように捉えられる可能性もある．別な例を考えよう．あなたは咳が出るので病院に行ったとしよう．医者はあなたに「この薬を飲めば咳は止まります」と告げた．あなたはうっかりその薬を飲むのを忘れたが，しかし咳はすぐに収まった．この場合，医者の言ったことは嘘になるだろうか？ そうではないだろう．医者はその薬を呑むことが咳がすぐ止まることの十分条件であるといっただけで，必要条件であると言ったわけではない．

日常言語では必要十分条件の意味で条件文が使われることもある．たとえば「20 歳未満の喫煙は禁じられている」と言われた場合には，20 歳以上だったら喫煙は禁じられていないものと考えるのが普通だろう．こ

のような場合においては前件が後件の必要十分条件になっているということが意図されている．日常言語においてこのような使い方があるということが条件文についての理解を難しくしている．しかしここではあくまでも十分条件として条件文の意味を理解しよう．すると (3) には真が入らなければならない．というのも (3) を偽にすると，条件文は必要十分条件を表わすことになってしまうからである．

条件文を必要十分条件として定義せず，十分条件として定義する理由はいくつかある．第一に，必要十分条件は十分条件（および連言）から自明な仕方で定義することができる．というのも A が B の必要十分条件であるということは，A が B の十分条件であり，かつ B が A の十分条件であるということに等しいので，必要十分条件を表わす結合子を $\equiv$ で表わすことにすれば，$A \equiv B$ は $(A \to B) \wedge (B \to A)$ によって定義することができるからである．逆に $\equiv$ から $\to$ を定義することはそれほど自明ではない．第二に，伝統的に論理学においては条件文は必要十分条件ではなく十分条件を表わすものとして使われることの方が多い．たとえば A ならば B と B から A を推論することは**後件肯定の誤謬**といわれ，また A ならば B と A の否定から B の否定を推論することは**前件否定の誤謬**と呼ばれ，ともに伝統的に論理的誤謬の代表とされてきた．しかしながらもしも「ならば」を必要十分条件として理解するなら，これらは誤謬ではなく正しい推論ということになる．

現代論理学の創始者の一人であるラッセルは，実質含意の役割について次のように説明している．ラッセルは数学の命題は基本的に前件と後件に同じ変数が現れる条件文の形式をとる，と述べる．そしてそのような条件文を**形式含意** *formal implication* と呼ぶ．形式含意が真であるのはその変数にいかなる値を代入した結果も真である時である，と定義される．そのような数学的命題の例としては「x が 4 の倍数であれば x は 2 の倍数である」というような命題が挙げられる．これは前件と後件に x という共通の変数がある条件文なので形式含意である．これが真になるのは x にいかなる値を代入したときも，その結果として得られる命題が真である時である．例えば x に 8 を代入したとき，私たち「8 が 4 の倍数であれば 8 は 2 の倍数である」という命題を得る．x に 5 を代入したときは「5 が 4 の倍数であれば 5 は 2 の倍数である」という命題を得る．これらはラッセルによればすべて真なる命題でなければならない．そうでなければもとの形式含意が真でなくなってしまうからである．これらが真であるためにには，変数を含まない条件文の真理値は，前件が偽の時は後件の真偽に関わらず真，後件が真の時は前件の真偽に関わらず真となっていなければならないのである．つまりラッセルにとっては形式含意が本質的であり，実質含意はその真偽を与えるために導入される，操作的な概念に過ぎない．実際のところ，私たちが条件文を使う場合の多くは，何かしら不確定な要素を含んでいる．そしてその不確定な要素のいかなる実例によって確定されても，前件が真になる場合には後件が真になるということが条件文で意味されていることであろう．

実質含意の定義にはこのような理由があるのではあるが，しかしその理由を聞かされたからといって，その不自然さが払拭されるわけではない．条件文の定義は二値原理と外延性の原理の帰結であるならば，それらの原理を採用しない，別な条件文の説明をあるのではないか．次節以降は実質含意に変わる条件文の定義を見ていこう．

3　厳密含意——条件文と必然性

前節でみたように古典論理は二値原理と外延性原理という二つの原理に従っている．このために古典論理における条件文——実質含意——は，私たちの直観に反する奇妙な性質を持つことになった．その奇妙な性質とは，前件と後件の内容的な繋がりを無視して，それらの真偽のみを考慮したことによって生じている．例えば「このコインが表がでたら日本の首都は東京だ」は古典論理では真なる条件文として通用してしまう．

この条件文が真であるということは「日本の首都は東京だ」という文が事実として真であるということ（そしてそのことだけ）に依存している．しかしながら一般に条件文が表明しているのは，事実としての前件や後件の真偽に関する何かではなく，前件が成り立つときには**必ず**（**常に**）後件が成り立つ，という前件と後件の**必然的な繋がり**であると考えられる．

この前件と後件の必然的な繋がりという観点を反映するために考案されたのが，**厳密含意** *strict implication* と呼ばれる条件文である．本節では厳密含意がどのように定義され，そしてどのような性質を持つのかを見る．

3.1　必然様相と可能様相

実質含意に欠けているのは，前件と後件の必然的なつながりである．その特徴をとらえるためには私たちは必然性の概念を表現できるような論理体系を作らなければならない．そのためにはこれまでの命題論理の記号体系では不十分である．そこで私たちはこれまでの言語に「……は必然的である」という表現を加えて拡張する．これは任意の命題 A に対して $\Box A$ と表わされる．具体的には論理式の定義は次のように修正される．

1. $p, q, r, p_1, q_1, r_1, \ldots$ は論理式である．これらは**原子式**と呼ばれる
2. A, B が論理式であるとき，$\neg A, (A \land B), (A \lor B), (A \to B), \Box A$ は論理式である．これらはそれぞれ**否定**，**連言**，**選言**，**条件文**，**必然様相文**と呼ばれる．またこれらをまとめて**複合式**と呼ぶこともある．
3. 上記の二つの規則によって論理式であると定まるものだけが論理式である．

$\Box A$ は「A ということが必然的である」を意味することを意図されている．したがって $\neg\Box\neg A$ は「A でないということが必然的ではない」という意味であり，「A であることが可能である」を意味すると考えることができる．私たちはこれを $\Diamond A$ と略記する．以後は $\mathbf{Form}_\Box$ によってこのように定義された論理式の集合を表わすことにする．

必然性はどのようなものであるかについて，また必然性がどのような性質を満たすべきかについては様々な考え方がある．例えばあることが必然的であればそれは現実に成り立っていると考えるのは自然だろう．一方で必然性は必ずしも現実性を含意しないという考え方もある．またあることが必然であるなら，そのことが必然であることも必然であるという考え方もある．ここではそのような必然性の捉え方の違いについて詳しくは論じない．私たちは定式化が比較的容易な必然性だけを考えることにする．

3.2　様相論理の意味論

あることが必然であるというのはどういうことか．一つの捉え方は，考えうるあらゆる状況においてそれが成り立つ，ということである．状況とは様々な事態の成立と不成立の組み合わせである．例えば現実においては空は青く，ボブ・ディランはミュージシャンであるが，そうでないことも考えられる．例えば可能な一つの

状況においては空は赤くて，ボブ・ディランは画家かもしれない．私たちが考慮している個別的な事態が空が青いかどうかとボブ・ディランがミュージシャンであるかどうかの二つであるとすれば，可能な状況は全部で四通りある．

状況 (1)	空は青い	ボブ・ディランはミュージシャンである
状況 (2)	空は青い	ボブ・ディランはミュージシャンではない
状況 (3)	空は青くない	ボブ・ディランはミュージシャンである
状況 (4)	空は青くない	ボブ・ディランはミュージシャンではない

私たちの道具立てでは，考慮するべき事態の一つ一つはそれぞれ一つの原子式の真偽によって表現される．従って一つの可能な状況とは，原子式それぞれの真偽の組み合わせである．つまり，可能な状況とは前節で定義した一つの解釈に類比的なものである．ただしここでは解釈される式の中に様相文が加わっている点が異なっている．

ここで様相論理の意味論の形式的な定義を与えよう．

Definition 3.1 (構造)**.** W は空でない集合，$@ \in W$ とする．W の要素は**可能世界**と呼ばれ，特に $@$ は**現実世界**と呼ばれる．各 $w \in W$ に対して $v_w : \mathbf{Form}_\Box \to \{0,1\}$ は次の条件を満たす関数であるとする：すべての論理式 A, B に対して，

1. $v_w(\neg A) = 1 \iff v_w(A) = 0$
2. $v_w(A \land B) = 1 \iff v_w(A) = 1$ かつ $v_w(B) = 1$
3. $v_w(A \lor B) = 1 \iff v_w(A) = 1$ または $v_w(B) = 1$
4. $v_w(A \to B) = 1 \iff v_w(A) = 0$ または $v_w(B) = 1$
5. $v_w(\Box A) = 1 \iff$ すべての $w' \in W$ に対して$, v_{w'}(A) = 1$
6. $v_w(\diamond A) = 1 \iff$ ある $w' \in W$ に対して$, v_{w'}(A) = 1$

$v = \{v_w : w \in W\}$ とする．このとき $(W, @, v)$ を（様相論理の）**構造**と呼ぶ．

$S = (W, @, v)$ は構造とする．$w \in W$ に対して $v_w(A) = 1$ であるとき，A は構造 S の可能世界 w **において真である**と言われ，

$$S, w \models A \quad \text{または} \quad w \models_S A$$

と書かれる．問題にしている構造が明らかである時には単に $w \models A$ と書く場合もある．

Definition 3.2 (式の評価，論理的帰結)**.** 様相論理の式は何らかの構造において評価される．式 A が構造 $S = (W, @, v)$ **において真である**のは $S, @ \models A$ が成り立つときである．このとき

$$S \models A \quad \text{または} \quad \models_S A$$

と書く．式 $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ が，任意の構造 S に対して

$$\models_S A_i \text{がすべての } A_i (1 \leq i \leq n) \text{ に対して成り立つならば } \models_S B$$

を満たす時，B は $A_1, A_2, \ldots, A_n$ からの**論理的帰結**であるといわれ．

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

と書かれる．

Theorem 3.3 (様相論理における定理)**.** 任意の論理式 A, B に対して以下が成り立つ.

1. A が古典命題論理のトートロジーならば $\models A$.
2. $\models A$ ならば $\models \Box A$
3. $\Box(A \to B) \models \Box A \to \Box B$
4. $\Box(A \wedge B) \models \Box A \wedge \Box B$
5. $\Diamond(A \vee B) \models \Diamond A \vee \Diamond B$
6. $\neg\Box A \models \Diamond\neg A$
7. $\neg \Diamond A \models \Box\neg A$
8. $\Box(A \vee B) \models \Box A \vee \Diamond B$
9. $\Diamond A \wedge \Box B \models \Diamond(A \wedge B)$
10. $\Box A \models A$
11. $\Box A \models \Diamond A$
12. $A \models \Box \Diamond A$
13. $\Box A \models \Box\Box A$
14. $\Diamond A \models \Box \Diamond A$

Proof このうちのいくつかを証明しよう.

2 について. 対偶を証明する. $\not\models \Box A$ としよう. このときある構造 $S = (W, @, v)$ に対して $S \not\models \Box A$. 従って $S, @ \not\models \Box A$. すなわちある $w \in W$ が存在して, $S, w \not\models A$. ここで構造 S' を (W, w, v) として定義しよう. つまり S' は現実世界が @ から w に変わった以外は S と等しい構造である. この構造において明らかに $S', w \not\models A$. 従って $S' \not\models A$. 従って $\not\models A$.

3 について. $S = (W, @, v)$ は任意の構造とする. $S \models \Box(A \to B)$ かつ $S \models \Box A$ とする. このとき任意の $w \in W$ に対して $w \models A \to B$ かつ $w \models A$. 従って $w \models B$. よって任意の $w \in W$ に対して $w \models B$. よって $S \models \Box B$. よって $S \models \Box A \to \Box B$.

残りは練習問題とする. $\Box$

Exercise 3.4. 定理 3.3 の残りを証明しなさい.

3.3 厳密含意

私たちが実質含意に関して見出した困難のもとは, それが前件と後件の間の必然的な繋がりを捉えることができていないということである. そこで私たちは以上で導入した必然性の概念を用いて, 新しい含意関係を「A ならば B ということが必然的である」を意味するものとして定義する. これを**厳密含意**と呼ぶ.「必然的である」は「A ならば B」の全体を修飾していることに注意しよう. 形式的には厳密含意は $\Box(A \to B)$ として定義される. $A \to \Box B$ ではない. 以後, 厳密含意を $A \Rightarrow B$ によって表わす.

Theorem 3.5 (厳密含意の性質)**.** 厳密含意は任意の式 A, B, C に対して以下を満たす.

1. $\models \Box A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $\models \neg \Diamond A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
3. $A \models B \iff \models A \Rightarrow B$

4. $\models A \Rightarrow A$

5. $A \Rightarrow B, A \models B$

6. $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$

7. $A \Rightarrow B \simeq \neg B \Rightarrow \neg A$

8. $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C \models A \Rightarrow (B \wedge C)$

9. $A \Rightarrow C, B \Rightarrow C \models (A \vee B) \Rightarrow C$

10. $(A \vee B) \Rightarrow C \simeq (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$

11. $\not\models A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

12. $\not\models \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

13. $\not\models (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$

14. $\not\models (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C)$

15. $\not\models ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

16. $A \wedge B \Rightarrow C \not\models A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

17. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \not\models B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

18. $\not\models A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B))$

Proof　このうちのいくつかを証明する．

1 について．背理法による．仮に 1 が成り立たないとする．このときある構造 $S = (W, @, v)$ に対して $S, @ \not\models \Box A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$．すなわち $S, @ \not\models \Box(\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow A)$．このときある $w \in W$ に対して $S, w \not\models \Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow A)$．従って $S, w \models \Box A$ かつ $S, w \not\models \Box(B \rightarrow A)$．後者よりある $w' \in W$ に対して $S, w \not\models B \rightarrow A$，すなわち $S, w' \models B$ かつ $S, w' \not\models A$．しかし $S, w \models \Box A$ より $S, w' \models A$ でなければならない．従って矛盾する．

11 について．$W = \{@, w\}, v_@(p) = 1, v_w(p) = 0, v_w(q) = 1$ であるような構造 $S = (W, @, v)$ を考えよう．このとき $S, w \not\models p$ かつ $S, w \models q$．従って $S, w \not\models q \rightarrow p$．従って $S, @ \not\models \Box(q \rightarrow p)$．一方で $S, @ \models p$ だから $S, @ \not\models p \rightarrow \Box(q \rightarrow p)$ よって $S, @ \not\models \Box(p \rightarrow \Box(q \rightarrow p))$．よって $S, @ \not\models p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$．従ってこの構造 S が反例になる．残りは練習問題とする． $\Box$

Exercise 3.6. 定理 3.5 の残りを証明しなさい．

3.3.1 厳密含意の欠点

厳密含意に関して重要なのは定理 3.5 の 11-15 である．これは実質含意が持っていた，真なる命題はいかなる命題からも帰結する，および偽なる命題からはいかなる命題も帰結する，などの奇妙な性質を厳密含意が持たないということを意味する．しかしながら厳密含意にも不自然な点がない訳ではない．例えば定理 3.5 の 1 は必然的な命題はいかなる命題からも含意されるということを意味する．従って例えば「大阪が日本の首都ならば $1 + 1 = 2$」が成り立つ．

また例えば 7 などにも場合によっては不自然な点がない訳ではない．例えば「久木田は奥さんに注意されないとひげをそらない」の対偶は「久木田はひげをそると奥さんに注意される」になるが，これは到底推論できそうに思われない．

逆に厳密含意によってブロックされる推論の中には，不自然とは思われないものもある．定理 3.5 の 16 は，厳密含意においては連言 A と B の連言が C を含意するからといって，A という条件のもとで B が C を含意

するということが言えない，ということを表わす．17 は A という条件のもとで B が C を含意すると言えるからといって，B という条件のもとで A が C を含意するとは言えない，ということを表わす．18 は，A という条件のもとで，B から A かつ B が結論できないということを表わしている．これらは条件文に関して成り立っているのが自然と思われる性質である．

厳密含意は確かに実質含意では可能だった不自然な推論の一部をブロックすることに成功している．しかしながらそのような推論のすべてがブロックできているわけではない．また厳密含意によっては妥当でなくなるが，自然と思われる推論も存在する．これは何も厳密含意に限ったことではない．どのような条件文の特徴づけに対しても，それにとって不利な事例を日常言語から見つけてくることは可能である．というのもそもそも，日常言語の「ならば」が非常に多様な意味，用法を持っているからである．問題はむしろ，そのように多様な意味を持つ日常言語の条件文を，一緒くたに取り扱おうとしていることであるように思われる．条件文をある仕方で定式化するときに，私たちがしなければいけないのは，その定式化によって日常言語の条件文のどのような側面を捉えようとしているのか，ということを考え，そのことによってその特徴づけを正当化することである．そのことを最も真剣に受け止め，成功しているのは次節で取り上げる直観主義論理である．

しかし直観主義論理に進む前に，様相論理に関してもう少し述べておこう．上述したように様相論理には様々な異なる体系が存在する．それらの異なる体系を定式化する非常にエレガントな方法があるのである．

3.4 可能世界間の到達可能性とクリプキ意味論

以上の意味論によって定義される論理を $\mathbf{M}$ と呼ぶことにする．$\mathbf{M}$ においては，ある世界で $\Box A$ が成り立つということは，すべての世界で A が成り立つことであると定義されていた．この定義によればある世界で $\Box A$ が成り立つときにはすべての世界でもそれが成り立つことになる．これはまた $\Diamond A$ についても同様である．しかしながら必然性と可能性をそのように考えない方が都合がよい場合もある．つまりある命題の必然性と可能性はそれがどの可能世界で評価されるかに依存する，と考えた方が自然に思われる場合があるのである．例えば必然性と可能性をそれぞれ将来について必ず起こることと起こりうることと考えてみよう．私たちの現実世界においては人間が太陽系外に旅をすることは可能であるように思われる．しかし人間が滅びてしまった世界ではそれは不可能である．つまり人間が太陽系外に旅をしている世界は，この現実世界から見れば可能な世界だが，人間が滅びてしまった別な世界では不可能な世界である．

このように可能世界というものはすべて一様なものではなく，ある世界から見て可能な世界と別な世界からみて可能な世界は異なっているものと考えるのは自然である．このアイディアはどのように意味論に組み込めるだろうか．

Definition 3.7 (様相論理のクリプキ・モデル)**.** W は空でない集合，$@ \in W$，$R \subset W \times W$ とする．これまで通り W の要素を**可能世界**，$@$ を**現実世界**と呼ぶ．R は W 上の**到達可能性関係**と呼ばれる．各 $w \in W$ に対して $v_w : \mathbf{Form}_\Box \to \{0,1\}$ は次の条件を満たす：任意の論理式 A, B に対して

1. $v_w(\neg A) = 1 \iff v_w(A) = 0$
2. $v_w(A \wedge B) = 1 \iff v_w(A) = 1$ かつ $v_w(B) = 1$
3. $v_w(A \vee B) = 1 \iff v_w(A) = 1$ または $v_w(B) = 1$
4. $v_w(A \to B) = 1 \iff v_w(A) = 0$ または $v_w(B) = 1$
5. $v_w(\Box A) = 1 \iff wRw'$を満たすすべての $w' \in W$ に対して,$v_{w'}(A) = 1$
6. $v_w(\Diamond A) = 1 \iff wRw'$を満たすある $w' \in W$ に対して,$v_{w'}(A) = 1$

$v = \{v_w : w \in W\}$ とする．このとき $(W, @, R, v)$ を（様相論理の）**クリプキ・モデル**と呼ぶ．

式の評価，論理的帰結関係は以前と同様に定義されるものとする．このように定義される様相論理の意味論を**クリプキ意味論**と呼ぶ．

さて，この変更によって何が変わったのだろうか．上述したように前節までの構造においては一つの世界で $\diamond A$ が成り立つならばすべての世界でそれが成り立つ．従って $\diamond A \models \Box \diamond A$ が成り立つのである．しかしながらクリプキ意味論においてはこれが成り立たない．また以前の意味論では，あることがある世界で必然的であるならば，それはすべての世界で成り立つので，それは特に現実世界で成り立つ．従って $\Box A \models A$ が成り立つ．しかしながらこれもまたクリプキ・モデルでは成り立たない．現実世界がそれ自身に対して到達可能であるとは限らないからである．実際のところ定理 3.3 の 10 以下の帰結関係はクリプキ意味論においては成り立たない．

しかしながら到達可能性関係に一定の制約を課すことで，私たちはより強い論理を定義することができる．例えばすべての世界がすべての世界に到達可能であるという条件を課すことで，前節までの様相論理と同じものが得られる．

関係の性質として以下の概念を定義する．

Definition 3.8 (関係の性質)**.** W は集合，$R \subset W \times W$ とする．このとき

- R は**反射的** *reflexive* $\iff$ すべての $w \in W$ に対して wRw.
- R は**対称的** *symmetrical* $\iff$ すべての $w, w' \in W$ に対して wRw' ならば $w'Rw$.
- R は**継続的** *serial* $\iff$ すべての $w \in W$ に対してある $w' \in W$ が存在して wRw'.
- R は**推移的** *transitive* $\iff$ すべての $w, w', w'' \in W$ に対して wRw' かつ $w'Rw''$ ならば wRw''.
- R は**反対称的** *assymmetrical* $\iff$ すべての $w, w' \in W$ に対して wRw' かつ $w'Rw$ ならば $w = w'$.
- R は**前順序** $\iff$ R は反射的かつ推移的.
- R は**順序** $\iff$ R は前順序かつ反対称的.
- R は**ユークリッド的** *Euclidean*：すべての $w, w', w'' \in W$ に対して wRw', wRw'' ならば $w'Rw''$.
- R は**同値関係** *equivalence* $\iff$ R は反射的，対称的，かつ推移的.

Theorem 3.9. $S = (W, R, @, v)$ はクリプキ・モデルであるとする．このとき以下が成り立つ．

1. R が反射的 $\Longrightarrow$ 任意の論理式 A に対して $S \models \Box A \to A$.
2. R が対称的 $\Longrightarrow$ 任意の論理式 A に対して $S \models A \to \Box \diamond A$.
3. R が継続的 $\Longrightarrow$ 任意の論理式 A に対して $S \models \Box A \to \diamond A$.
4. R が推移的 $\Longrightarrow$ 任意の論理式 A に対して $S \models \Box A \to \Box\Box A$.
5. R がユークリッド的 $\Longrightarrow$ 任意の論理式 A に対して $S \models \diamond A \to \Box \diamond A$.

Proof 1 の証明のみを与える．$S = (W, R, @, v)$ はクリプキ・モデルであるとする．R が反射的であるとする．このとき特に $@R@$．従って任意の論理式 A に対して $@ \models \Box A$ ならば $@ \models A$.

残りは練習問題とする． □

Exercise 3.10. 定理 3.9 の残りを証明せよ．

Definition 3.11. クリプキ・モデルは伝統的に以下のように分類されている．

- **K**：任意のクリプキ・モデル.
- **KD**：到達可能性関係が継続的なモデル
- **KT**：到達可能性関係が反射的なクリプキ・モデル
- **KTB**：到達可能性関係が反射的かつ対称的なクリプキモデル
- **S4**：到達可能性関係が反射的かつ推移的
- **S5**：到達可能性関係が同値関係

これらクリプキ・モデルのクラスの各々によって定義される論理を，そのクラスと同じ名前で呼ぶことにする.

Theorem 3.12. クリプキ・モデルのクラスに関して以下が成り立つ.

1. **K** において妥当な推論はすべて **KD** においても妥当である．しかしその逆は成り立たない.
2. **K** において妥当な推論はすべて **KT** においても妥当である．しかしその逆は成り立たない.
3. **KT** において妥当な推論はすべて **KTB** においても妥当である．しかしその逆は成り立たない.
4. **KT** において妥当な推論はすべて **S4** においても妥当である．しかしその逆は成り立たない.
5. **KTB** において妥当な推論はすべて **S5** においても妥当である．しかしその逆は成り立たない.
6. **S4** において妥当な推論はすべて **S5** においても妥当である．しかしその逆は成り立たない.
7. **S5** において妥当な推論はすべて **M** においても妥当であり，かつその逆も成り立つ.

Proof 1 について．一方向はクリプキ・モデルのクラス間の包含関係を考えれば自明である．**K** はすべてのクリプキ・モデルのクラスであるから **KD** に属するクリプキ・モデルはすべて **K** に属する．従ってある推論に関して，**K** において反例がないということは，**KD** においても反例がないということである．逆の方向について．$\Box A \to \Diamond A$ は **KD** では妥当であるということは定理 3.9 の 3 によって示されている．一方で **K** においてはこれが成り立たない．たとえば到達可能性関係が空であるようなモデル $S = (W, \varnothing, @, v)$ を考えればよい．@ から到達可能な世界は存在しないので，任意の論理式 A について空虚に $@ \models \Box A$ が成り立つ．逆に任意の論理式 A について $@ \not\models \Diamond A$ である．従って $@ \not\models \Box A \to \Diamond A$.

2-6 についても同様にして証明ができる．これは練習問題とする.

7 について．任意の **S5** モデル $S = (W, R, @, v)$ に対して，構造 $S' = (W', @, v')$ を次のように定義しよう.

- $W' = \{w : w \in W, @Rw\}$
- 任意の $w \in W'$ と $p \in \mathbf{Atom}$ に対して $v'_w(p) = v_w(p)$.

このとき任意の命題 A と $w \in W'$ について

$$S, w \models A \iff S', w \models A \tag{1}$$

が成り立つことが A の構成に関する帰納法によって証明できる．重要なのは A が $\Box B$ または $\Diamond B$ という形式の場合である．前者について証明しよう．$\Longrightarrow$ の向きについて．$S \models \Box B$ とする．このとき $@Rw$ であるすべての $w \in W$ に対し $S, w \models B$．従って帰納法の仮定よりすべての $w \in W'$ に対して $S', w \models B$．よって $S', @ \models \Box B$．$\Longleftarrow$ の向きについても同様．従って 1 が成り立つ．従ってある推論が **S5** モデル S で妥当であれば，その推論は **M** の構造 S' でも妥当である.

次に逆の方向について．任意の **M** の構造 $S = (W, @, v)$ に対して，**S5** モデル S^* を $(W, W \times W, @, v)$ として定義する．すなわちこれはすべての世界がすべての世界に到達可能なモデルである．このとき任意の命題

A と任意の $w \in W$ に対して

$$S, w \models A \iff S', w \models A \tag{2}$$

が成り立つことが A の構成に関する帰納法によって容易に示される．詳細は練習問題とする． $\square$

Exercise 3.13. 定理 3.12 の証明を完成させなさい．

4　直観主義論理における条件文

4.1　真理と証明可能性

直観主義はオランダの数学者 L. E. J. ブラウワーによって提唱された数学の哲学である．A. ハイティングはブラウワーの哲学に基づき，直観主義論理を定式化した．

直観主義論理と古典論理の最も顕著な違いは，排中律を認めるか否かという点である．排中律は，任意の命題について，その命題かその命題の否定のどちらかが必ず真である，ということを述べるものであり，論理式では $A \lor \neg A$ によって表現される．古典論理で採用されている二値原理によれば，これはもちろん成り立っている．すべての命題は真か偽のどちらかの値をとるのであり，かつある命題の否定はもとの命題とは異なる真理値をとる．従っていかなる命題 A についても A か $\neg A$ のどちらかは必ず真になる．よって $A \lor \neg A$ は必ず真である．

しかしブラウワーはこれを否定する．数学においてある命題が真であるということは，その命題が証明可能であるということに他ならない，とブラウワーは主張する．だとすればすべての命題に関してそれが証明できるか，その否定が証明できるかのどちらかであるということは必ずしも成り立たないだろう．従って排中律は誤りである．ブラウワーのこのような考え方は，現在ではゲーデルの不完全性定理によって強いサポートを得ている．というのもゲーデルの不完全性定理は，現在の数学の標準的な基礎理論である ZF 集合論においては，それ自身もその否定も証明できない命題が存在する，ということを主張するものだからである．それどころかゲーデルの結果によれば，ZF 集合論の無矛盾な拡張は必ずそのような命題を持つのである．従って私たちが数学を，ある程度強力な（すくなくとも実数論が展開できる程度には強力な）形式的体系と同一視するのであれば，私たちは数学においては証明も反証もできない命題が存在することを認めなければいけない．

これに対する可能なリアクションは三通りである．一つは数学が不完全であることを認めてしまうことである．しかしこれはゲーデルが発見した証明も反証もできない命題が，実際には真であるように思われる，という直観に反する．というのも簡単にいえばゲーデルが発見した命題は，それ自身が証明可能ではないということを意味しているものと考えられるからである．その命題が証明できないのだから，その命題は真であることを主張しているように思われる．もう一つは，数学には ZF のような形式的体系には収まりきらない部分がある，と主張することである．ゲーデル自身も採用していたこの立場は，人間が行う証明とは独立な数学的真理が存在する，というある種のプラトニズムにコミットする．最後は，数学が無矛盾ではないかもしれないという可能性を許容することである．この立場とるならば，数学においてはすべての命題が証明可能ということになるのだが，しかし数学を行う論理を通常よりも弱い論理だと考えることで破滅的な帰結を回避することはできる．これらのリアクションにはそれぞれにメリットとデメリットがあるが，それらを論じることはこのテキストの目的ではない．

さて，もし数学において証明も反証（否定の証明）も出来ない命題があるのであれば，そしてもし数学における真理を証明可能性と捉えるのが適切なのであれば，排中律が成り立たない直観主義論理は数学にとって正しい論理であるように思われる．しかし直観主義から帰結するのは排中律の否定だけではない．同じくらい重要なのは，直観主義では二重否定律が一般には成り立たない，ということである．二重否定律は $\neg\neg A \to A$ によって表わされる推論規則であり，古典論理などでは正しい原理とされる．古典では命題は真か偽のどちらかの値をとるのであり，従って命題 A が偽でないとすればそれ A は必ず真である．しかし直観主義では命題 A が真であるとということは A が証明可能であるということであり，A が偽であるということは A が証明でき

ないことが証明できるということである．従って A の二重否定は A が証明できないことが証明できないことが証明できるということである．ここから A が証明できるということが帰結しないことは明らかである．もし明らかでなければ「証明できる」とを「証拠がある」や「知りうる」に置き換えても良い．A だという証拠がないということの証拠がないことの証拠があるからといって，A の証拠があるというにはならない．あるいは A だと知りえないことが知りえないと知りうるからといって，A だと知りうるということにはならない．

証明というのはあることが正しいことを検証する手段，すなわちそれが正しいことを認識する手段である．証明可能性に関わる直観主義論理は，私たちの認識についての理論であると言ってよいかもしれない．一方で古典論理は人間の認識とは独立に成り立つ真理についての論理である．直観主義においてある命題が真であるということは，それを知っているという証拠を出すことができる，私たちはそれを主張する正当化を得ているということを意味するのである．

4.2 直観主義における結合子の説明

このように真理を証明可能性に置き換えて考えたとき，条件文「A ならば B」は何を意味するのだろうか．まず私たちはある命題の意味を考えるときにはその検証条件（証明条件）を考えるべきだということに同意しているものとする．単純に考えれば，「A ならば B」の証明は，「A が証明できるならば B が証明できる」ことの証明である，と考えられる．あるいは「A の証明があるならば B の証明がある」ということの証明だと言っても良い．しかしながらここではパラフレーズした後にも「ならば」という言葉が使われているためにあまり役に立たない．もう少し説明しなければならないだろう．しかしそのためには私たちは一般にある命題の証明があるということがどういうことか，とくに論理的な命題のそれぞれの形式について証明があるというのがどういうことかを考えなければいけない．

一般に「A の証明がある」などと言う際の証明は A がどのような命題であるかに依存する．例えば私が京都市民であることの証明は住民票によって得られる．しかし同じことの証明は住民票だけでなく，運転免許証や保険証等によっても得られるだろう．しかしこれらの複数の証明はすべて市役所にある住民台帳に基づいている．従って私が京都市民であることの最も直接的な証明は住民台帳であるということになる．このようにある命題の証明の中で，最も基本的とみなせるものを**正規な**証明と呼ぶことにする．

命題 A の証明のすべてが何かしらの正規な証明に還元できるのであるとすれば，私たちはその証明から命題 A が真であると結論できるだけではなくて，命題 A が真であるということからそのような正規な証明があるのだと推論することができる．例えばあなたが何らかの仕方で私が京都市民であるということが真であると知ることができたならば，あなたはそこから京都市の住民台帳に私の名前があるということを知ることができ，その情報を利用することができる．

あることの証明を利用するという観点は，直観主義論理における結合子と量化子の説明において重要である．ここでは命題論理のみを扱うので，結合子に話を限る．

私が京都市民であることの証明の一つは住民票によって得られる．また私が先週 ABC マートでナイキの靴を購入したことの証明はレシートである．この二つの証明を合わせれば，私が京都市民でありかつ私が先週 ABC マートでナイキの靴を買ったことの証明になる．このように A かつ B の証明は，A の証明と B の証明を合わせたものになる．逆に A かつ B の証明があるということが分かっていれば，それは A の証明と B の証明を合わせたものであるだろうから，私たちはそこから A の証明と B の証明の両方を得ることができる．$x : A$ によって x は A の証明であるということを表わすことにしよう．すると今述べたことは次のような図式で表現することができる

$$\frac{x : A \qquad y : B}{(x, y) : A \wedge B}$$

(x, y) という記号は x という証明と y という証明を合わせるという手続きを行った結果である．上の例のように証明が書類であるならば，これは書類をまとめてファイルにしておくというような手続きを行った結果と思えば良い．この図式は自然演繹の $\wedge$ 導入規則に対応する．

一方で証明がこのような形でまとめられているならば，そのファイルから一枚目の書類をとりだすという手続きによって A の証明が得られ，二枚目の書類をとりだすという手続きによって B の証明が得られる．この手続きは次のような図式で表現することができる．

$$\frac{z : A \wedge B}{\mathbf{fst}(z) : A} \qquad\qquad \frac{z : A \wedge B}{\mathbf{snd}(z) : B}$$

この図式は自然演繹の $\wedge$ 除去規則に対応する．ただし $\mathbf{fst}(z)$ は $A \wedge B$ の証明である z から A の証明をとりだす手続きを表わしており，$\mathbf{snd}(z)$ は z から B の証明をとりだす手続きを表わす．このとき z は A のある証明 x と B のある証明 y に対して，(x, y) という正規な形を持つ，ということが前提されている．

ある会員制のスポーツ・クラブで，学生またはシニア（60 歳以上）の会員は利用料の割引を受けられるサービスがあったとしよう．ある人が学生証を持っていればその人が学生である証明になり，従ってその人が学生またはシニアであることの証明になる．そのクラブは学生証のコピーを保管して，その人がそのサービスをうける資格があることを確認できるようにしている．コピーそのままでも良いのだが，それが学生であることの証明だということを明示するために「学」という印をつけている．またある人が免許証を持ち，それでシニアであることが確認できれば，その免許証がシニアの証明になり，従って学生またはシニアの証明になる．この場合もクラブは免許証のコピーをとり，そこに「シ」と印をつけておく．このことによってある会員が割引特典を受けられる資格の有無とともに，学生であるかシニアであるかのどちらであるかが分かるようにしている．この手続きは次のような図式で表現することができる．

$$\frac{x : A}{\mathbf{insl}(x) : A \vee B} \qquad\qquad \frac{y : B}{\mathbf{insr}(y) : A \vee B}$$

この図式は自然演繹の $\vee$ 導入規則に対応する．

クラブでは学生会員の場合は毎年 4 月にその資格が失われていないかを確認する手続きをしなければならない．しかしシニア会員の場合はそのような手続きは必要ない．そこでこのクラブでは毎年，割引会員すべてに対して，学生であれば資格の確認をするダイレクトメールを送り，シニア会員であれば何もせずに OK とする，という手続きを行う．この手続きは次のような図式で表わすことができる．

$$\frac{z : A \vee B \qquad \begin{array}{c}(x : A)\\ \vdots \\ d(x) : C(\mathbf{insl}(x))\end{array} \qquad \begin{array}{c}(y : B)\\ \vdots \\ e(x) : C(\mathbf{insr}(y))\end{array}}{D(z, d, e) : C(z)}$$

ここで $C(z)$ は z という割引会員証明に対して，資格の確認手続きが済んでいるということを表わす．$d(x)$ は x という書類によって特定される会員にダイレクトメールを送るという手続きを表わす．$e(y)$ は y という書類は確認ずみとするという手続きを表わす．$D(z, d, e)$ は z を確認して，それが $\mathbf{insl}(x)$ という形であれば手続き d を行い，$\mathbf{insr}(y)$ という形ならば手続き e を実行する，という手続きをあらわす．この図全体としては，学生会員に対してその資格の確認をする手続き d があり，シニア会員に対してその資格を確認する手続き e があるならば，任意の割引会員に対してその資格を確認する手続き D が構成できるということを表わして

いる．この図式は自然演繹の $\vee$ 除去規則に対応する．

古典論理における $\vee$ と直観主義論理における $\vee$ の違いに注意しよう．直観主義論理では $A \vee B$ は正規な証明として，A のある証明 x に対する $\mathbf{insl}(x)$，または B のある証明 y に対する $\mathbf{insr}(y)$ を持つ．従って私たちは $A \vee B$ の証明を調べることによって A か B の証明を得ることができるのである．しかしこれは古典論理においては一般的に成り立たない．というのも古典論理においては $A \vee B$ が証明されていても，A か B のどちらかが証明されているとは限らないからである．このことは古典における排中律の証明に顕著である．古典論理においては排中律は次のように証明される：

> いま $A \vee \neg A$ が成り立たないとする．さらに A と仮定すると $A \vee \neg A$ が帰結し，これは $A \vee \neg A$ が成り立たないという仮定に矛盾する．従って $\neg A$ である．しかしこのときやはり $A \vee \neg A$ が帰結し，再び仮定と矛盾する．従って $A \vee \neg A$ が成り立たないという仮定は誤りである．よって $A \vee \neg A$ は成り立つ．

この証明においては，A も $\neg A$ も証明されることなく，$A \vee \neg A$ が証明されている．このような証明が可能なのは古典論理においては二重否定の除去が許されているからである．この証明では $A \vee \neg A$ が成り立たないという仮定が否定されたことから，$A \vee \neg A$ が成り立つという推論が行われている．しかしすでに述べたように，直観主義論理においては二重否定の除去は一般に成り立たない．このことによって一般に直観主義では $A \vee B$ の証明が存在する時には必ず A の証明か B の証明かのどちらかが存在するということが保証される．これを直観主義における**選言性質** *disjunction property* と呼ぶ．

次に条件文が直観主義的にどのように説明されるかを見ていこう．例えば私たちは「$A \wedge B$ ならば $B \wedge A$」ということを知っている．これは直観主義的には，「$A \wedge B$ の証明があるならば $B \wedge A$ の証明があるということの証明がある」を意味している．しかし上で述べたとおり，この言明にも「ならば」が現れているために，私たちはこの「ならば」をもう少し慎重に分析しなければならない．$A \wedge B$ の証明がある時に $B \wedge A$ の証明があるということはどのようにして確かめられるのだろうか．すでにみたように $A \wedge B$ の証明とは，典型的には A の証明 x と B の証明 y に対して，(x, y) という形である，ということを私たちはすでに見た．そこで私たちは $A \wedge B$ の証明 (x, y) から x と y を取りだして $(y, x)y$ を構成すれば $B \wedge A$ の証明が手に入る．この手続きは次のような図式で表わすことができる．

$$\dfrac{\dfrac{z : A \wedge B}{\mathbf{snd}(z) : B} \qquad \dfrac{z : A \wedge B}{\mathbf{fst}(z) : A}}{(\mathbf{snd}(z), \mathbf{fst}(z)) : B \wedge A}$$

この手続きは $A \wedge B$ の任意の証明 z に対して適用できる．つまり $A \wedge B$ の異なる証明 $z, z', z'', \ldots$ に対して $B \wedge A$ の証明 $(\mathbf{snd}(z), \mathbf{fst}(z)), (\mathbf{snd}(z'), \mathbf{fst}(z')), (\mathbf{snd}(z''), \mathbf{fst}(z'')), \ldots$ を構成することができるのである．この手続きによって，$A \wedge B$ の任意の証明に対して，$B \wedge A$ の証明を得ることができるということが保証される．私たちはこのことを「$A \wedge B$ の証明があるならば $B \wedge A$ の証明がある」ことの証明とみなす．より一般的には，A の任意の証明 x に対して，B の証明 $d(x)$ を構成する手続き d が存在するとき，「A ならば B」の証明が存在すると考える．

上の図が $A \wedge B$ の証明から $B \wedge A$ の証明を構成する手続きを表わしている．従って上の図全体が $A \wedge B \to B \wedge A$ の証明である．従って私たちは

$$\left(\dfrac{\dfrac{z : A \wedge B}{\mathbf{snd}(z) : B} \qquad \dfrac{z : A \wedge B}{\mathbf{fst}(z) : A}}{(\mathbf{snd}(z), \mathbf{fst}(z)) : B \wedge A} \right) : A \wedge B \to B \wedge A$$

のように書くことができる．しかしこのような書き方はあまりに煩雑で，場所も取りすぎる．そこでこの証

明に $\lambda z.(\mathbf{snd}(z), \mathbf{fst}(z))$ という名前をつけよう．これは任意の入力 z に対して $(\mathbf{snd}(z), \mathbf{fst}(z))$ を出力として返す手続きであるということを意味している．このような手続きが構成できるということが $A \wedge B$ ならば $B \wedge A$ が真であるということであり，そしてこの手続きの構成そのものが $A \wedge B$ ならば $B \wedge A$ の証明に他ならない．

一般に命題 A の任意の証明 x から決まった手続きで命題 B の証明 $d(x)$ が構成できるとき，$\lambda x.d(x)$ が $A \to B$ の証明になる．これを図式的に表わすと

$$\dfrac{\begin{array}{c}(x : A)\\ \vdots\\ d(x) : B\end{array}}{\lambda x.d(x) : A \to B}$$

となる．これは自然演繹の $\to$ 導入規則に対応する．

私たちが $A \to B$ の証明 f を持っているとする．また私たちは A の証明 x も持っているとする．f は A の任意の証明から B の証明を構成する手続きであるので，f を x に適用することによって，私たちは B の証明を得ることができる．このことは

$$\frac{f : A \to B \qquad x : A}{\mathbf{Ap}(f, x) : B}$$

という図式によって表わすことができる．ただしここで $\mathbf{Ap}(f, x)$ は f という手続きを x という入力に対して適用するという手続きを表わす．これは自然演繹の $\to$ 除去規則に対応する．

最後に直観主義における否定の説明をしよう．A の否定が証明されるということは，直観主義的には A の証明が存在することが不可能であると証明されるということである．これは A の証明が存在するという仮定から矛盾が証明できるということとして理解される．$\bot$ によって矛盾を表わすことにしよう．すると A の否定の証明は，A の任意の証明 x から $\bot$ の証明 $d(x)$ を構成する手続きであるということになる．これは

$$\dfrac{\begin{array}{c}(x : A)\\ \vdots\\ d(x) : \bot\end{array}}{\lambda x.d(x) : \neg A}$$

という図式によって表わすことができる．ここから $\neg A$ を $A \to \bot$ と等しいものとして理解することができる．

古典論理と同様，直観主義論理においても爆発原理 $\neg A \to (A \to B)$ は成り立つものとされる．より端的にはこの原理は $\bot \to B$ と表現できる．このことの正当化は次の通りである．$\bot$ は矛盾であるからそれには証明が存在しないものと考えられる．ところで一般に $A \to B$ の証明は A の任意の証明を B の一つの証明に変換する手続きである．いま A に証明が存在しないのだとすれば，何もしないという手続きが，A の任意の証明を B の一つの証明に変換する手続きとみなすことができる．このことが納得できなければ次のように考えればよい．あなたは受付の仕事をしており，そこに来た来客のすべての用事を聞き，必要ならば適切な部署に取り次ぐという仕事をしているとする．しかしあなたがその仕事に従事している間，一度も来客がなかったとする．その場合はあなたは何もしないということによってその業務を全うしたのである．このことは

$$\frac{x : \bot}{N(x) : B}$$

という図式によって表現される．ただし $N(x)$ は x に対して何もしないという手続きである．

このように直観主義は，それぞれの結合子に対して，その結合子を含む命題の正規な（標準的な）証明がどのような手続きに存しているか，ということを考察することによって，論理式の意味を解釈しようとする．このような解釈は提唱者の名前にちなんで **Brouwer-Heyting-Kolmogorov 解釈**と呼ばれている．

4.3　直観主義命題論理のクリプキ意味論

以上において私たちは直観主義論理における結合子の意味の説明を見た．それは主としてどのようにしてその結合子を持つ命題が証明されるかという観点からの説明であった．すなわちそれは証明論による直観主義論理の特徴づけである．本節では直観主義論理を意味論的な観点によって特徴づけよう．直観主義論の意味論には，代表的なものとして，ハイティング代数による意味論，トポロジーを使った意味論，圏論を使った意味論，そして前節で紹介したクリプキ意味論がある．ここでは直観主義命題論理に対するクリプキ意味論を見ていこう．以下での意味論は **Form** に対する意味論である，$\mathbf{Form}_\Box$ に対する意味論でないことに注意しよう．

Definition 4.1 (直観主義命題論理に対するクリプキ・モデル)**.** $S = (W, R, @, v)$ は様相論理のクリプキ・モデルと同様であるが，さらに以下の条件を満たすものとする．

1. R は順序関係である．すなわち R は反射性，推移性，反対称性を満たす（定義 3.8 を参照）．
2. 任意の $w, w' \in W$ と $p \in \mathbf{Atom}$ 対して $wRw'1$ かつ $v_w(p) = 1$ ならば $v_{w'}(p) = 1$.
3. $v_w(A \to B) = 1 \iff$ すべての $w' \in W$ に対して wRw' ならば $v_{w'}(A) = 0$ または $v_{w'}(B) = 1$.
4. $v_w(\neg A) = 1 \iff$ すべての $w' \in W$ に対して wRw' ならば $v_{w'}(A) = 0$.

このとき S は直観主義命題論理の**クリプキ・モデル**と呼ばれる．1 を**順序性条件**，2 の条件を**遺伝性条件**と呼ぶ．

論理的帰結の概念は以前と同様に定義される．このように定義される命題論理の意味論を**直観主義のクリプキ意味論**という．

Lemma 4.2. $S = (W, R, @, v)$ は直観主義命題論理のクリプキ意味論とする．このとき任意の式 A と $w, w' \in W$ に対して，wRw' かつ $w \models A$ ならば $w' \models A$.

Proof　A が原子文の時は自明である．連言，または選言の時は帰納法を使って容易に証明できる．A が $\neg B$ の時．$w \models \neg B$，wRw' とする．このとき wRw'' を満たす任意の $w'' \in W$ に対して $w'' \not\models B$．いま $w'Rw'''$ を満たす任意の w''' を考える．このとき R の推移性より wRw'''．従って $w''' \not\models B$．よって $w' \models \neg B$．A が条件文の場合も否定の場合と同様に証明できる．□

Theorem 4.3. 直観主義論理のクリプキ意味論において，以下が成り立つ．

1. $\not\models A \vee \neg A$
2. $\neg\neg A \not\models A$
3. $\neg(A \wedge B) \not\models \neg A \vee \neg B$
4. $\neg A \to \neg B \not\models B \to A$
5. $\models \neg\neg(A \vee \neg A)$
6. $A \models \neg\neg A$

7. $\neg(A \vee B) \models \neg A \wedge \neg B$
8. $A \to B \models \neg B \to \neg A$
9. $\models A \to (B \to A)$
10. $\models \neg A \to (A \to B)$
11. $A \wedge B \to C \models A \to (B \to C)$
12. $A \to (B \to C) \models B \to (A \to C)$
13. $\models A \to (B \to A \wedge B))$
14. $\not\models (A \to B) \vee (B \to A)$
15. $\not\models (A \to B) \vee (B \to C)$
16. $\not\models ((A \to B) \to A) \to A$

Proof　このうちのいくつかを証明しよう．

1 について．$S = (W, R, @, v)$ は直観主義命題論理のクリプキ・モデルであるとする．また $W = \{@, w\}, @Rw, v_@(p) = 0, v_w(p) = 1$ とする．このとき $@ \not\models p$ かつ $@ \not\models \neg A$ は自明．

5 について．あるクリプキ・モデル $S = (W, R, @, v)$ に対して $@ \not\models \neg\neg(A \vee \neg A)$ とする．このとき $@Rw$ を満たすある $w \in W$ に対して $w \models \neg(A \vee \neg A)$．従って wRw' を満たすすべての $w' \in W$ に対して $w' \not\models A \vee \neg A$．従ってそのような任意の w' に対して，$w' \not\models A$ かつ $w' \not\models \neg A$．R は反射的だから wRw であり，従って特に $w \not\models A$ かつ $w \not\models \neg A$．後者の条件より wRw'' を満たすある $w'' \in W$ に対して $w'' \models A$．一方で wRw'' より $w'' \not\models A$ でなければならない．これは矛盾である．

6 について．あるクリプキ・モデル $S = (W, R, @, v)$ に対して $@ \not\models A \to \neg\neg A$ とする．このときある $w \in W$ が存在して $@Rw$，$w \models A$ かつ $w \not\models \neg\neg A$．従ってある $w' \in W$ に対して wRw' かつ $w' \models \neg A$．従ってすべての $w'' \in W$ に対して $w'Rw''$ ならば $w'' \not\models A$．R は反射的だから $w'Rw'$，よって特に $w' \not\models A$．しかし wRw'，$w \models A$ と補題 4.2 より，$w' \models A$．よって矛盾．残りは練習問題とする．□

Exercise 4.4. 定理 4.3 の残りを証明しなさい．

4.4　直観主義的に見る数学的真理

直観主義論理においては，実質含意のパラドクスとして挙げられていた推論のいくつかがブロックされている（定理 4.3 の 14-16）．それだけではなく，直観主義論理では排中律や二重否定律などの，それほど問題ないと思われる推論も不可能になっている（定理 4.3 の 1 から 4）．しかしそのことは必ずしも直観主義論理の欠点と考えられるべきではない．というのも直観主義はむしろ，それらの推論が成り立つことが問題だと考えるところからスタートしているからである．そしてその際に直観主義は，数学における真理は証明が存在することと同一視する．

直観主義は数学という限定された領域にのみ適用される立場であって，もちろん数学を離れれば直観主義が明らかに間違いであるように思われる例はある．例えばミトコンドリア・イブ[*2]がリンゴを食べたかどうかの証拠を私たちは手に入れることができない．従って直観主義的にはミトコンドリア・イブがリンゴを食べたか食べなかったかのどちらかだということは言えない．にもかかわらずミトコンドリア・イブはリンゴを食べたか食べなかったかのどちらかだといことは正しいように思われる．そのように思われるのはミトコンドリア・

[*2] 全人類の共通の祖先と考えられている女性．

イブという存在が私たちの認識とは独立に存在する客観的な対象だからである．そのような対象についての事実もまた，私たちがその事実を検証する手段とは独立に存在する．

このことはフィクションのキャラクターについての言明を考えれば明らかである．例えばシャーロック・ホームズはリンゴを食べたことがあったのだろうか．シャーロック・ホームズについて確かめることのできる「事実」はドイルによって書かれた物語がすべてである．もしコナン・ドイルが，ホームズはリンゴを食べたと書いていれば（あるいはそれを含意することを書いていれば），ホームズはリンゴを食べたのだ．もしそのようなことが書いていなければ，ホームズがリンゴを食べたとも食べなかったとも言えない[*3]．従ってホームズのようなフィクションのキャラクターについては，排中律が必ずしも成り立たないように思われる．

直観主義は数学的事実がそれを検証する手段と独立に存在しないという前提にコミットする．ある意味でこれは数学を小説のようなフィクションと同等に扱うということである．それゆえ数学的事実が私たちの証明とは独立に存在していると考える人々にとって，直観主義を受け入れることはできない．

4.5 直観主義論理に対するクリプキ意味論の「意味」

様相論理のクリプキ意味論は，必然性と可能性という様相概念を捉えるために可能世界という道具立てを導入し，それを数学的に定式化したものである．あることが必然的に真であるということは，それがいかなる可能世界においても真であるということを意味するものとして分析され，その分析を反映したのがクリプキ意味論である．では直観主義論理に対するクリプキ意味論については，意味論とそれが意味を与えようとしている概念との間の関係はどうなっているのだろうか．つまり直観主義論理に対するクリプキ意味論は何を「意味」しているのだろうか．特にここで問題にされるべきは，なぜ到達可能性関係が順序関係とされているのか，そしてなぜ遺伝性条件が必要なのかである．

一つの明白な答えは，それらの条件を課すことで求める論理が得られるから，というものである．数学者や論理学者はそのような答えに満足するかもしれない．実際，直観主義論理に関してはクリプキ意味論や他の意味論は，形式的体系によって定義された論理を，数学的道具立てによって特徴づけるために作られたものである．しかし私たちは数学的にモデル化された意味論が現実世界のどのような特徴をとらえているのかということに興味がある．そこで可能な限りクリプキ意味論に対する直観的な「意味づけ」を行ってみたい．

まず可能世界と到達可能性関係が何を意味しているのかということを考えよう．一般に可能世界とは，私たちが想像しうる何らかの状況が成り立っている世界である．例えばこの世界ではゲーデルが不完全性定理を発見したが，フォン・ノイマンがその定理の発見者になったことということは可能であるかもしれない．しかし例えばピタゴラスがその定理の発見者になった可能性は，この世界とはあまりにかけ離れていて，ありそうにない．このようにある世界から到達可能な可能世界とは，もとの世界とは異なる（かもしれない）が，しかしもとの世界がそのようであったこともありうるような世界，と考えられる．しかし直観主義論理に対するクリプキ意味論における可能世界とはこういったものではない．直観主義論理に対するクリプキ意味論ではある可能世界で成立していることはそこから到達可能なすべての可能世界で成立していなければならない（補題 4.2）．従ってこの世界で不完全性定理を発見したのがゲーデルであれば，そこから到達可能なすべての世界で，不完全定理の発見者はゲーデルでなければならない．しかしある世界で成立していないことが，そこから到達可能な世界のどこかで成立することはありうる．ここから可能世界というのは事実の不完全な集まりであ

[*3] ホームズ物語に書かれていないことは偽であるとする考え方もあるだろう．しかしそのときホームズはホームズ物語に食べたと書かれているもの以外は一切食べなかった人間ということになる．それどころか彼はホームズ物語に書かれていること以外は何もしなかった．

り，到達可能な世界をたどって先に進むにつれて成立する事実が増えていく（しかし減ることはない）というようなイメージを持つことができる．直観主義の思想に即して考えるのであれば，ある世界で真理値 1 を与えられている命題は，「真であることが検証済み」命題と考えるのが適切であろう．一方である世界で真理値 0 を与えられている命題は「検証されていない」命題である．これは必ずしもその命題が偽であるということを意味しない．だとすればある世界から到達可能な世界とは，もとの世界で検証されている事実に加えて、さらに新しい事実が検証された世界と考えることができる．

ここから遺伝性条件が課されている理由も理解できる．あることを検証するということは，それが事実であることを確かな証拠によって立証するということである．特に直観主義での検証は形式的な証明である．そして一度証明された数学的事実が後から覆されることはない．従ってある世界で真を与えられた命題は，そこから到達可能なすべての世界で真なのである．

最後に到達可能性関係の順序性条件に関して考えよう．上で見たとおり，ここでの可能世界は検証された真理の総体として理解でき，またある可能世界から到達できる世界とは，もとの世界で検証された真理の総体に，さらに別の検証された真理を付け加えたものと理解できる．この世界でまだ検証されていない真理を検証した時，私たちはもとの世界から別の世界へと移動するのである．このように考えれば到達可能性の関係が順序関係になっていることは納得がいく．まず反射性についてであるが，w において検証済みの真理のすべては当然 w 自身において検証されている．従って w が自分自身に到達可能であると考えることは合理的である．次に推移性について．wRw' かつ $w'Rw''$ としよう．このとき w で検証済みの真理はすべて w' で検証済みであり，w' で検証済みの真理はすべて w'' で検証済みである．従って w で検証済みの真理はすべて w'' で検証済みである．反対称性について．wRw' かつ $w'Rw$ としよう．このとき w で検証済みの真理は w' でも検証済みであり，かつその逆も成り立つ．従って w と w' は正確に同じ事実が真であると確証されている．世界を検証された事実の総体と同一するのであれば，この場合に w と w' を区別する理由はない．

4.6 直観主義の形式的体系

ここまで直観主義をクリプキ意味論によって特徴づけてきたが，実際には直観主義の論理が最初に定式化されたのは，形式的体系によってである．ここで簡単に直観主義の形式的体系を紹介しよう．

一般に形式的体系とは，記号を操作するための形式的な規則の集まりである．その規則を使って導出された記号列はその体系の定理と呼ばれる．特に論理学においては，形式的体系の定理は，その論理において妥当とされる推論を構成する．

ここでは直観主義論理の形式的体系の一つである，自然演繹の体系を紹介する．自然演繹は私たちが数学において証明を行う仮定を模した形式的体系である．それは何らかの命題を仮定することから証明を開始し，すでに得られた証明に様々な推論規則を適用することで新しい証明を形成する．自然演繹には古典論理や様相論理などの他の論理に対するものあるが，以下では単に自然演繹ということで直観主義命題論理の自然演繹を指す．自然演繹で使われる推論規則には以下のものがある．

Definition 4.5 (直観主義論理の自然演繹の規則)**.** 直観主義論理の自然演繹は以下の規則を持つ．以下の図は水平線の上の式から水平線の下の式を導出しても良いということを表わす．水平線の横の記号と文字は規則の名前である．

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge\text{-I} \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge\text{-EL} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge\text{-ER}$$

$$\frac{A}{A \lor B}\ \lor\text{-IL} \qquad \frac{B}{A \lor B}\ \lor\text{-IR} \qquad \frac{A \lor B \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ \lor\text{-E}$$

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ \to\text{-I} \qquad \frac{A \to B \quad A}{B}\ \to\text{-E} \qquad \frac{\perp}{A}\ \perp\text{-E}$$

上で論理式が [] で囲まれているのは，その論理式が，証明が依存している仮定から除外されていることを表わす．数学における証明は何らかのことを仮定することから出発するので，得られた結論はその仮定に依存している．しかし推論規則の中にはその仮定に対する依存を解除するものがある．例えば古典命題論理において $(A \to B) \lor (B \to C)$ が真であることの次の証明を考えよう．

Proof　任意の付値において B は真か偽のどちらかである．B が真であるとする．このとき $A \to B$ は真である．従って $(A \to B) \lor (B \to C)$ は真である．一方 B が偽であるとする．このとき $B \to C$ は真である．従って $(A \to B) \lor (B \to C)$ は真である．従っていずれにしても $(A \to B) \lor (B \to C)$ は真である．　□

この証明においては，途中で「B が真である」と「B が偽である」という仮定が置かれている．しかしながら，そのどちらかが必ず成り立つということ，および，そのどちらからも「$(A \to B) \lor (B \to C)$ が真である」という結論が導かれるということから，最終的にこれらの仮定に依存しない結論「$(A \to B) \lor (B \to C)$ が真である」が導かれるのである．

以下では自然演繹における証明を定義する．

Definition 4.6 (証明)**.** 自然演繹における**証明**と同時に，その証明の**仮定**と**結論**が次のように再帰的に定義される．仮定は論理式の集合，結論は単一の論理式であることに注意しよう．以下において $\mathcal{D}$ が自然演繹の証明であるとき，$H(\mathcal{D})$ によって，$\mathcal{D}$ の仮定を，$C(\mathcal{D})$ によって $\mathcal{D}$ の結論を表わすことにする．

1. 任意の論理式 A は自然演繹における証明である．このときこの証明の仮定の集合は $\{A\}$ であり，また結論は A である．
2. $\mathcal{D}_1$，$\mathcal{D}_2$ が自然演繹における証明であるとき，

$$\frac{\mathcal{D}_1 \qquad \mathcal{D}_2}{C(\mathcal{D}_1) \land C(\mathcal{D}_2)}$$

は自然演繹における証明であり，その仮定は $H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2)$，その結論は $C(\mathcal{D}_1) \land C(\mathcal{D}_2)$ である．

3. $\mathcal{D}$ が自然演繹における証明であり，$A \land B$ がその結論であるとき，

$$\frac{\mathcal{D}}{A}$$

および

$$\frac{\mathcal{D}}{B}$$

は自然演繹における証明であり，その仮定はどちらにおいても $H(\mathcal{D})$，その結論はそれぞれ A，B である．

4. $\mathcal{D}$ が自然演繹における証明であるとき，任意の論理式 A に対して

$$\frac{\mathcal{D}}{C(\mathcal{D}) \vee A}$$

および

$$\frac{\mathcal{D}}{A \vee C(\mathcal{D})}$$

は自然演繹における証明であり，その仮定はどちらにおいて $H(\mathcal{D})$，その結論はそれぞれ $C(\mathcal{D}) \vee A$ または $A \vee C(\mathcal{D})$ である．

5. $\mathcal{D}_1$，$\mathcal{D}_2$，$\mathcal{D}_3$ が自然演繹の証明であり，$\mathcal{D}_1$ の結論が $A \vee B$，$\mathcal{D}_2$ と $\mathcal{D}_3$ の結論がいずれも C であるとき，

$$\frac{\mathcal{D}_1 \qquad \mathcal{D}_2 \qquad \mathcal{D}_3}{C}$$

は自然演繹における証明であり，その仮定は $H(\mathcal{D}_1) \cup (H(\mathcal{D}_2) \setminus \{A\}) \cup (H(\mathcal{D}_3) \setminus \{B\})$，その結論は C である．

6. $\mathcal{D}$ が自然演繹における証明であるとき，任意の論理式 A に対して

$$\frac{\mathcal{D}}{A \to C(\mathcal{D})}$$

は自然演繹における証明であり，その仮定は $H(\mathcal{D}) \setminus \{A\}$，その結論は $A \to C(\mathcal{D})$ である．

7. $\mathcal{D}_1$，$\mathcal{D}_2$ が自然演繹における証明であり，その結論がそれぞれ $A \to B$，A であるとき，

$$\frac{\mathcal{D}_1 \qquad \mathcal{D}_2}{B}$$

は自然演繹における証明であり，その仮定は $H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2)$，その結論は B である．

8. $\mathcal{D}$ が自然演繹における証明であり，その結論が $\bot$ であるとき，任意の論理式 A に対して

$$\frac{\mathcal{D}}{A}$$

は自然演繹における証明であり，その仮定は $H(\mathcal{D})$，その結論は A である．

Definition 4.7 (定理)**.** $\mathcal{D}$ が自然演繹における証明であり，その仮定が $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，その結論が B であるとき，

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$$

は自然演繹で**導出可能**あるいは**定理**であると呼ばれる．

Example 4.8. 以上の定義によって例えば以下が自然演繹における証明である．

1. $A \vee (B \wedge C) \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$$\dfrac{\dfrac{[A \vee (B \wedge C)] \qquad \dfrac{\dfrac{[A]}{A \vee B}\,{\scriptstyle \vee\text{-IL}} \qquad \dfrac{[A]}{A \vee C}\,{\scriptstyle \vee\text{-IL}}}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,{\scriptstyle \wedge\text{-I}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \wedge C]}{B}\,{\scriptstyle \wedge\text{-EL}}}{A \vee B}\,{\scriptstyle \vee\text{-IR}} \qquad \dfrac{\dfrac{[B \wedge C]}{C}\,{\scriptstyle \wedge\text{-ER}}}{A \vee C}\,{\scriptstyle \vee\text{-IR}}}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,{\scriptstyle \wedge\text{-I}}}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,{\scriptstyle \vee\text{-E}}}{A \vee (B \wedge C) \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,{\scriptstyle \to\text{-I}}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$ が直観主義の自然演繹における定理であるということは，直観主義論理において $A_1, A_2, \ldots, A_n$ から B への推論が妥当であるということに等しい．これは次の定理によって保証される．

Theorem 4.9 (直観主義命題論理の健全性，完全性)**.** 任意の論理式 $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ に対して次の二つの条件は同値である．

1. $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$ が直観主義命題論理の自然演繹で導出可能．
2. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ から B への推論が，直観主義命題論理に対するクリプキ意味論によって妥当．

Proof 省略する． □

5 結び

このテキストでは論理学における条件文の扱いを，古典論理，様相論理，そして直観主義論理の例に即して概観した．

「A ならば B」という命題の意味は，古典論理においては「A が偽であるか，または B が真である」という真理条件によって説明される．このように特徴づけられた条件文は実質含意と呼ばれる．実質含意の問題点は，前件と後件の真偽にしか注目していないため，前件と後件が内容的にまったく関係のないような命題でも条件文が真になるということである．例えば前件に現れる命題が偽である場合には，後件にどのような命題が来ても，条件文全体は真になってしまう．このことは非常に不自然である．

条件文においては前件と後件の偶然的な真偽だけではなく，それらの間の必然的なつながりが重要であるように思われる．このような直観に基づき，必然性の概念を組み込んだ様相論理において，厳密含意と呼ばれる条件文が提案された．厳密含意は「A が真であるときは必ず B も真である」を意味する．あることが必然的であるということは，可能世界意味論の枠組みによって「すべての可能世界において成り立つこと」として定義される．厳密含意は実質含意の持ついくつかの問題点を解決しているが，残された問題点もある．一つには，前件が必然的に偽の場合には，後件にどのような命題が来ても，条件文全体が真になってしまう，という問題がある．同様に，後件が必然的に真であれば，後件にどのような命題が現れるかにかかわらず条件文は真である．また厳密含意には，たとえば「A ならば B ならば C」から「B ならば A ならば C」への推論を不可能にする，という実質含意にはない新たな問題点もある．

問題は，これらの個々の条件文の定義が不十分あるいは不適切であることよりも，私たちが日常言語で用いる条件文の意味があまりに多様で，どのような特徴付けをしても，それに対して不都合な事例が見つかる，ということである．従って論理学の課題は，いかにして日常言語の使用例をカバーするかということよりも，まずどのような意味での条件文をカバーすることを意図しているかを明かにすることであるように思われる．

その点で比較的成功しているのは直観主義論理であるように思われる．直観主義においては「A ならば B」は，「A の任意の証拠を B の証拠に変換する手続きがある」ということを意味するものとして理解される．直観主義はそもそも数学の論理として発展したものであり，従ってここでの証拠は数学的証明である．どのようなものが数学的証明として認められるかということは，明確であり、またある命題の証明を別の命題の証明に変換する手続きがどのようなものであるかについてのも直観主義は明確にしている．

この点を考慮すると，少なくとも条件文の意味の説明に関しては，直観主義論理が他の論理に比べて最も成功しているように思われる．