集合論の用語*

久木田水生

定義 1 (集合，要素)**.** 集合 *set* とは任意の対象の集まりである．任意の対象 $a, b, c, \ldots$ を $\{\ \}$ でくくった表現，すなわち $\{a, b, c, \ldots\}$ は $a, b, c, \ldots$ からなる集合を表す．このとき $a, b, c, \ldots$ はこの集合の**要素**または**元** *element* であるという．

対象 a が集合 S の要素であるということを $a \in S$ と表現する．また a が S の要素ではないということを $a \notin S$ と表現する．

集合の表記において，要素の並び方の順序は問われない．従って $\{a, b\}$ と $\{b, a\}$ は同じ集合を表現している．

また一つの集合に同じ対象は一個しか属さない．従って $\{a, a\}$ は $\{a\}$ と同じ集合を表現している．

定義 2 (空集合)**.** 要素を一つも持たない集合を**空集合** *empty set* といい，$\varnothing$ によって表す．

定義 3 (集合の内包的表記)**.** $C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ によって n 個の変数[*1] $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を含む何らかの条件 —— 例えば「x_1 はアルファベットの文字である」，「x_1 を 3 で割った余りと x_2 を 3 で割った余りは等しい」，「$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$」等々 —— を表わす．このとき条件 $C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 満たすような対象 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の組 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ すべてからなる集合を $\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mid C(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ で表す．例えば $\{x \mid x$ は 5 以下の自然数 $\}$ は 5 以下の自然数すべてからなる集合，すなわち $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ である[*2]．

定義 4 (部分集合)**.** 集合 S のすべての要素が集合 T の要素でもあるとき，S は T の**部分集合**または単に**部分** *subset* であるという．このことを $S \subseteq T$ によって表す．

任意の集合 S について，$\varnothing \subseteq S, S \subseteq S$ が成り立つ．

定義 5 (集合の同一性)**.** $S \subseteq T$ と $T \subseteq S$ の両方が成り立っているとき，つまり S のすべての要素が T の要素であり，かつ T のすべての要素が S の要素であるとき，S と T は**同一**であるといい，このことを $S = T$ によって表す．これは，集合の同一性はその要素の同一性に帰されるということを意味する．

定義 6 (真部分集合)**.** $S \subseteq T$ であり，かつ $S = T$ でないとき S は T の**真部分集合**または単に**真部分** *proper subset* であるといい，このことを $S \subsetneq T$ によって表現する．

定義 7 (集合の和，共通部分，差)**.** S の要素と T の要素のすべてからなる集合を S と T の**和**または**合併** *union* といい，$S \cup T$ によって表す．

S と T に共通の要素からなる集合を S と T の**共通部分**または**交わり** *intersection* といい，$S \cap T$ によって

* Cf. 松阪和夫『集合・位相入門』(岩波書店，1968 年)，小野寛晰『情報代数』(共立出版，1994 年)．

*1 変数は数だけではなく，任意の対象を値にとることが出来る．

*2 本テキストでは 0 は自然数として扱う．

表す．

より一般的に，集合を要素として持つ集合 $\mathfrak{M}$ に対して，$\mathfrak{M}$ の合併と交わりを次のように定義する．

$$\bigcup \mathfrak{M} = \{x \mid \exists M \in \mathfrak{M}(x \in M)\}$$

$$\bigcap \mathfrak{M} = \{x \mid \forall M \in \mathfrak{M}(x \in M)\}$$

S の要素であるが，T の要素ではないものすべてからなる集合を S と T の**差***subtraction* といい，$S \setminus T$ または $S - T$ によって表す．

例 8. $S = \{0, 1, 2\}, T = \{2, 3, 4\}$ であるとき，

$$\begin{aligned}
&S \cup T = \{0, 1, 2, 3, 4\},\\
&S \cap T = \{2\},\\
&S \setminus T = \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

この定義では例えば $S_1 \cup S_2 \cap S_3$ が，$S_1 \cup S_2$ と S_3 との共通部分を表わしているのか，それとも S_1 と $S_2 \cap S_3$ との和を表わしているのかが不明である．そこで前者を指すためには $(S_1 \cup S_2) \cap S_3$ と表記し，後者を指すためには $S_1 \cup (S_2 \cap S_3)$ と表記して，集合に対する操作が行なわれた順番を明記することにする．しかし例えば $S_1 \cup (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cup S_2) \cup S_3$，$S_1 \cap (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cap S_2) \cap S_3$ なので，このような場合は操作の順番を括弧で表わす必要はない．

事実 9. 任意の集合 A, B, C に対して，以下の事実が成り立つ．

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$
- $(A \setminus B) \cup B = A$
- $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- $A \subseteq A$
- $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば $A \subseteq C$
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \subseteq A \cup B$
- $B \subseteq A$ かつ $C \subseteq A$ ならば $B \cup C \subseteq A$
- $A \subseteq B$ かつ $A \subseteq C$ ならば $A \subseteq B \cap C$
- 任意の x に対して条件 $C(x)$ が条件 $C'(x)$ にとって十分ならば，$\{x \mid C(x)\} \subseteq \{x \mid C'(x)\}$

定義 10 (べき集合)**.** S の部分集合のすべてからなる集合を S の**べき集合***power set* といい，$\mathfrak{P}(S)$ または $\mathbf{2}^S$

によって表す．例えば $S = \{0, 1, 2\}$ であるとき，

$$\mathfrak{P}(S) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

である．

定義 11 (直積)**.** S の任意の要素 x と T の任意の要素 y との対 $\langle x, y\rangle$ のすべてからなる集合 $\{\langle x, y\rangle \mid x \in S, y \in T\}$ を S と T の**直積***cartesian product* といい，$S \times T$ によって表す．例えば $S = \{0, 1\}, T = \{a, b, c\}$ であるとき，

$$S \times T = \{\langle 0, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 0, c\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle\}$$

である．

$S_1 \times (S_2 \times S_3)$ は $S_1 \times S_2 \times S_3$ と表記するものとする．直積 $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ の要素は正式には $\langle x_1, \langle x_2, \langle \ldots \langle x_{n-1}, x_n\rangle \ldots\rangle\rangle\rangle$ と書かれるのであるが，これを $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ と表わすことにする．

集合 S だけで直積を作る操作を n 回繰り返して作られる集合を S^n によって表わす．つまり

$$S^1 = S,$$
$$S^{n+1} = S \times S^n.$$

定義 12 (関係)**.** 任意の $S_1, S_2, \ldots, S_n$ について $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ の任意の部分集合 R を **(n 項) 関係***n-ary relation* という（ただし $n \geq 1$）．R が特に S^n の部分集合であるとき，R を S 上の **(n 項) 関係**という．

例 13. $\mathbb{N}$ によってすべての自然数の集合を表し，$\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の部分集合 L として $\{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2, x < y\}$ という集合を考える．このとき $\langle x, y\rangle$ が L の要素であるということと，x, y が自然数でありかつ $x < y$ が成り立つということは等しい．

二項関係 R に対して，しばしば $\langle x, y\rangle \in R$ を xRy と略記する．

定義 14 (反射性，対称性，推移性，反対称性)**.** R は S 上の二項関係とする．

(1) 任意の $x \in S$ に対して xRx が成り立つとき，R は**反射的***reflexive* であるという．

(2) 任意の $x, y \in S$ に対して，xRy ならば yRx が成り立つとき，R は**対称的***symmetrical* であるとという．

(3) 任意の $x, y, z \in S$ に対して，xRy かつ yRz ならば xRz が成り立つとき，R は**推移的***transitive* であるとという．

(4) 任意の $x, y \in S$ に対して，xRy かつ yRx ならば $x = y$ が成り立つとき，R は**反対称的***antisymmetric* であるという．

定義 15 (順序，全順序)**.** S 上の二項関係 $\leq$ が反射性，対称性，反対称性を持つとき，R は S 上の**順序**または**半順序***semiorder, partial order* であるという．さらに任意の $x, y \in S$ に対して，$x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つとき，$\leq$ は S 上の**全順序***total order* であるという．

定義 16 (順序集合，部分順序集合)**.** 集合 S と S 上の順序 $\leq$ の対，$(S, \leq)$ を**順序集合***partially ordered set; poset* と言う．$\leq$ が全順序であるとき $(S, \leq)$ を**全順序集合***totally ordered set* という．どの順序を指しているかが明らかな場合，$(S, \leq)$ を単に S と書く場合もある．

$(S, \leq)$ は順序集合であるとする．M は S の部分集合，かつ M 上の順序 $\leq_M$ が，任意の $x, y \in M$ に対して，

$$x \leq_M y \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq y$$

を満たすとき，$(M, \leq_M)$ を $(S, \leq)$ の**部分順序集合**という[*3]．またこのような $\leq_M$ は，$\leq$ を M 上に制限した順序であると呼ばれる．

定義 17 (上界，下界，上限，下限)**.** $(M, \leq_M)$ は $(S, \leq)$ の部分順序集合であるとする．M の任意の要素 x に対して，S の要素 y が $x \leq y$ を満たすとき，y を M の（ひとつの）**上界***upper bound* であるという．逆に M の任意の要素 x に対して，S の要素 y が $y \leq x$ を満たすとき，y を M の（ひとつの）**下界***lower bound* であるという．

S の要素 $\vee M$ が S における M の**上限***supremum* であるのは，$\vee M$ が

(1) 任意の $x \in M$ に対して，$x \leq \vee M$
(2) M の任意の上界 x に対して，$\vee M \leq x$

を満たすときである．

S の要素 $\wedge M$ が S における M の**下限***infimum* であるのは，$\wedge M$ が

(1) 任意の $x \in M$ に対して，$\wedge M \leq x$
(2) M の任意の下界 x に対して，$x \leq \wedge M$

を満たすときである．

事実 18. 任意の $(M, \leq_M)$ に対して，$(M, \leq_M)$ の上限および下限は存在するならば一意である．

例 19. (1) $\subseteq_S$ は $\mathfrak{P}(S)$ 上の部分集合関係であるとする．つまり任意の $M, N \in \mathfrak{P}(S)$ に対して，

$$M \subseteq_S N \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ は } N \text{ の部分集合}$$

が成り立つとする．このとき $\subseteq_S$ は $\mathfrak{P}(S)$ 上の順序である．

また $\mathfrak{P}(S)$ の任意の部分集合 $\mathfrak{M}$ に対して $\bigcup \mathfrak{M}, \bigcap \mathfrak{M}$ はそれぞれ $\mathfrak{M}$ の上限，下限である．

(2) $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合とする．また任意の $x, y \in \mathbb{N}$ に対して

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ が } y \text{ と等しいか，より小さい}$$

が成り立つとする．このとき $\leq$ は $\mathbb{N}$ 上の全順序である．

定義 20 (極大元，極小元，最大元，最小元)**.** $(S, \leq)$ は順序集合かつ $s \in S$ とする．任意の $x \in S$ に対して，$s \leq x$ ならば $s = x$ が成り立つとき，s は S の**極大元***maximal element* と呼ばれる．また任意の $x \in S$ に対して，$x \leq s$ ならば $s = x$ が成り立つとき，s は S の**極小元***minimal element* と呼ばれる．また任意の $x \in S$ に対して $x \leq s$ が成り立つとき，s は S の**最大元***maximum element* と呼ばれる．また任意の $x \in S$ に対して $s \leq x$ が成り立つとき，s は S の**最小元***minimum element* と呼ばれる．

事実 21. $(S, \leq)$ の最大元，最小元は存在するならば一意である．また $(S, \leq)$ の最大元，最小元はそれぞれ $(S, \leq)$ の極大元，極小元でもあるが，逆は必ずしも成り立たない．$(S, \leq)$ の部分順序集合 $(M, \leq_M)$ に最大元が存在するならば，それは $(M, \leq_M)$ の上限でもある．しかし逆は必ずしも成り立たない．

[*3] $\Longleftrightarrow$ は必要十分条件を表す．

例 22. $\mathbb{R}$ をすべての実数の集合，$\mathbb{Z}^+$ はすべての正整数の集合とする．$\leq$ は $\mathbb{R}$ 上の大小関係とする．$M = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ とし，$\leq_M$ は $\leq$ を M 上に制限した順序関係とする．このとき $(M, \leq_M)$ の上限は 1 である．しかし 1 は M に属していないので，M の最大元ではない．

定義 23 (整列集合)**.** $(S, \leq)$ が全順序集合であり，かつ S の任意の部分順序集合 $(M, \leq_M)$ に最小元が存在するとき，S を**整列集合***well-ordered set* と呼ぶ.

例 24. (1) 自然数の集合 $\mathbb{N}$ とその上の大小関係 $\leq$ に対して，$(\mathbb{N}, \leq)$ は整列集合である．しかし有理数の集合 $\mathbb{Q}$ とその上の大小関係 $\leq$ に対して，$(\mathbb{Q}, \leq)$ は整列集合ではない．たとえば $(\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x\}, \leq)$ が最小元を持たない $(\mathbb{Q}, \leq)$ の部分順序集合である.

定義 25 (同値関係)**.** S 上の二項関係 $\sim$ が反射性, 対称性, 推移性を持つとき, $\sim$ は S 上の**同値関係***equivalent relation* であるという.

例 26. 任意の $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$x \equiv_3 y \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ を 3 で割った余りと } y \text{ を 3 で割った余りが等しい}$$

が成り立つとする．このとき $\equiv_3$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係である.

定義 27 (同値類)**.** $\sim$ は集合 S 上の同値関係であるとする．このとき，任意の $x \in S$ に対して，$[x]_\sim = \{y \in S \mid x \sim y\}$ と定め，これを x の $\sim$ による**同値類***equivalent class* と呼ぶ．また

$$S/_\sim = \{[x]_\sim \mid x \in S\}$$

によって定められる集合 $S/_\sim$ を，S の $\sim$ による**商集合***quotient set* と呼ぶ.

事実 28. $\sim$ は集合 S 上の同値関係であるとする．このとき任意の $x, y \in S$ に対して，

$$[x]_\sim = [y]_\sim \Longleftrightarrow x \sim y$$

が成り立つ.

定義 29 (関数)**.** $A \times B$ の部分集合 f で，次の二つの条件を満たすものを A から B への**関数***function* または**写像***mapping, map* と呼ぶ.

(1) 任意の $a \in A$ に対して，ある $b \in B$ が存在して $\langle a, b\rangle \in f$.
(2) 任意の $a \in A$, $b, b' \in B$ に対して，$\langle a, b\rangle \in f$ かつ $\langle a, b'\rangle \in f$ ならば，$b = b'$.

言い換えると A の各要素 a に対して，$\langle a, b\rangle \in f$ なる B の要素 b が唯一つ存在するときに $f \subseteq A \times B$ は関数である.

f が A から B への関数であることを $f : A \to B$ によって表す．またこのとき A を f の**始領域***domain*，B を f の**終領域***codomain* と呼ぶ．$a \in A$, $b \in B$ に対して $\langle a, b\rangle \in f$ であるとき，b を $f(a)$ と表す.

始領域が直積集合 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ である場合，$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ に対して，$f(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle)$ は通常 $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と表記される.

例 30. $\mathbb{Z}$ によってすべての整数からなる集合を表わし，$\mathbb{Q}$ によってすべての有理数からなる集合を表わす．このとき $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}, f(x, y) = \frac{x}{y}$ と定めると f は $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ を始領域として持ち，$\mathbb{Q}$ を終領

域として持つ一つの関数である．しかし $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, f(x,y) = \frac{x}{y}$ と定めると，例えば $\langle 1, 0 \rangle$ は始領域の要素であるが，終領域に $f(1,0)$ に対応する要素が存在しないので，これは関数の定義として失敗していることになる．

定義 31 (恒等関数)**.** 任意の集合 A に対して，

$$id_A(a) = a \qquad (\forall a \in A)$$

によって定められる関数 $id_A : A \to A$ を A 上の**恒等関数***identity function* と呼ぶ．

定義 32 (関数の合成)**.** $f : A \to B$, $g : B \to C$ は関数であるとする．このとき $g \circ f : A \to C$ を次のように定義する．

$$g \circ f(a) = g(f(a)) \qquad (\forall a \in A)$$

$g \circ f$ を f と g の**合成***composition* と呼ぶ．

定義 33 (像，逆像)**.** 関数 $f : A \to B$ と A の部分集合 M に対して，集合 $\{f(x) \in B \mid x \in M\}$ を M の f による**像***direct image* とよび，$f[M]$ によって表す．また B の部分集合 N に対して，集合 $\{x \in A \mid f(x) \in N\}$ を N の f による**逆像***inverse image* と呼び，$f^{-1}[N]$ によって表す．

事実 34. 任意の写像 $f : A \to B$，$g : B \to C$，$h : C \to D$ に対して以下の事実が成り立つ．

- $id_B \circ f = f = f \circ id_A$
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- $g \circ f[M] = g[f[M]] \qquad (\forall M \subseteq A)$
- $(g \circ f)^{-1}[M] = f^{-1}[g^{-1}[M]] \qquad (\forall M \subseteq C)$
- $f[M \cap M'] = f[M] \cap f[M'],\ f[M \cup M'] = f[M] \cup f[M'] \qquad (\forall M, M' \subseteq A)$
- $f^{-1}[M \cap M'] = f^{-1}[M] \cap f^{-1}[M'],\ f^{-1}[M \cup M'] = f^{-1}[M] \cup f^{-1}[M'] \qquad (\forall M, M' \subseteq B)$

定義 35 (単射，全射，全単射)**.** 関数 $f : A \to B$ が，任意の $x, y \in A$ に対して，

$f(x) = f(y)$ ならば $x = y$

を満たすとき，f は**単射***injection* または**一対一の写像***one-to-one mapping* であるという．

また任意の $x \in B$ に対して $y \in A$ が存在して，

$f(y) = x$

を満たすとき f は**全射***surjection* または**上への写像***onto mapping* であるという．

f が全射でありかつ単射であるとき，f は**全単射***bijection* であるという．