数学的構造主義の哲学

久木田水生*

関西学院大学 2013 年度前期

1　序

西洋哲学においては伝統的に「個」を重視する傾向が支配的だった．まず確固とした個というものがあり，その上でそれらが持つ性質，そしてそれらの間の関係が存在する，という考えである．このような考え方は私たちの日常的な直観にとっても自然に思われる．「私」という個体は他の個体とは独立して存在しており，そして他者と様々な関係に立っている．「私」という個体が他の個体とともに生活することによって，家族や共同体が形成される．また「私」は大量の細胞が集まって結びつき相互作用することによって成立している．個々の細胞は分子から，分子はさらに原子から構成されて成り立っている．

このような考え方はおそらく西洋哲学の歴史と同じくらい古い．古代ギリシャの哲学者デモクリトスは，それ以上分割することができない粒子，**アトム**（ギリシャ語で「分割できないもの」を意味する）が世界の最も基本的な存在者である，と主張した．アトムは生成も消滅も変化もせず，なんの性質も持たない．あらゆる事物はアトムから構成される．物体の形や色などの性質は，その物体を構成するアトムがどのように配置されるかによって決定される．

アリストテレスの存在論においても最も基本的な存在者は個体であった．彼の存在論では，世界には他の存在者に依存せずにそれ自体で存在するものがあると考えられた．アリストテレスはそれを**実体**と呼んだ．そして他の実体との関係を含めて，それがもつ属性は実体に依存するもの，実体なしでは存在し得ないものと考えられた．存在のカテゴリーにおける実体の優位はその後も多くの哲学者によって受け入れられてきた．

その一方で，実体の優位性を否定する哲学的伝統もまた同じくらい古くから存在していた．ヘラクレイトスは，世界の根源は個々の事物ではなく，すべてのものが変化する**過程**であると考えた．例えば川について考えてみよう．一つの川というものは不変の実体として存在するものではない．川は水から構成されているが，しかし一つの川を構成する水は絶えず入れ替わっている．それゆえヘラクレイトスは「人は同じ川に二度入ることはできない」と述べた．このような絶え間ない変化の過程こそが川の本質である．生物に関しても同じことが言えるだろう．生物個体を構成する細胞は絶えず新陳代謝を行っており，人間に関しても，ある人を構成する細胞は数ヶ月でほとんど入れ替わる．そこで同一性を保っているのは，全体としての一定の状態である．だとすると私たちはヘラクレイトスにならって「人は同じ人に二度会うことはできない」と言っても良いのかもしれない．だとすれば生物についても変化の過程がその本質であるということが言える．ヘラクレイトスは世界のあらゆるものについて同じことが言えると考えたのである．そして火こそがこのような変化の過程を象徴するものだと考え，「万物の根源は火である」と言った．このような思想は**プロセス哲学**と呼ばれ，個体・実

* minao.kukita@gmail.com

体中心の存在論に対するオルタナティヴの一つとして存在してきた．

実体の優位性に対するもう一つの，より新しいオルタナティヴは**構造主義**である．構造主義は個体よりも，その個体を含む構造に注目する方法論である．現代の構造主義のルーツとしては，19 世紀末にフランスの言語学者ソシュールが創始した**構造主義言語学**と，20 世紀前半に同じくフランスの数学者集団ブルバキが推進した**構造主義数学**を挙げることができるだろう．ソシュールは言語体系の持つ抽象的な構造を研究し，ラング／パロールの区別，シニフィアン／シニフィエの区別など，後の言語学や記号論に大きな影響を与える概念的枠組みを見出した．ブルバキは 20 世紀の初頭に確立した**公理的方法**と**集合論**を用いて数学の再構築を行った．その際，彼らは具体的な対象よりも，その対象を含む全体が持っている構造を集合論の枠組みで公理化することで，抽象的な構造を直接に研究した．個体よりも構造に注目する方法論はその後，文化人類学，文学，心理学などにおいても広まり，大きな一つの思想的潮流となっていった．構造主義を代表する思想家としてレヴィ＝ストロース，バルト，ラカンなどが挙げられる．

数学の哲学における構造主義も同様に，数学的対象よりもそれらの作る構造を重視する立場である．ただし構造主義言語学や構造主義数学が，構造に注目して研究を推進しようとする方法論であるのに対して，数学の哲学における構造主義は数学に関する存在論的，認識論的な主張を含んでいる．私たちは以後**数学的構造主義**という言葉によって，数学の哲学における構造主義を意味することにする．数学的構造主義は，数学の哲学が伝統的に論じてきた様々な問題に答えることを目的として誕生したものである．

数学の哲学は伝統的に「数とは何か」という問題に取り組んできた．もちろん数学の哲学に限らず，○○学の哲学は○○学の主題的対象が何かという問題に取り組むものである．生物学の哲学ならば「生物とは何か」という問題に取り組むだろうし，物理学の哲学は「物体とは何か」という問題に取り組むだろう．しかし「数とは何か」という問題には他の問題とは異なる，固有の難しさがある．それは具体的にこれが数だと言えるものをはっきり示すことができない，ということである．生物の場合と比較してみよう．生物であるかどうかが判然としない境界事例というものは確かにある．ウィルスなどがそうである．しかし明らかに生物であるとみなされるものの例，明らかに生物でないものの例を挙げることは容易であるし，それらの実物を提示することもできる．しかし数に関してはこれができない

こう言うと「0 や 1 は典型的な数の例ではないのか」と反論する人がいるかもしれない．確かに 0 や 1 は数である．しかし私たちは 0 と 1 の実物を（さらに言えばいかなる数の実物も）提示することはできない．それどころか私たちは何かが数であるかどうかを判定する明確な基準も持っていないのである．たとえば私たちはジュリアス・シーザーが数であるかどうかを判定することができない．何を馬鹿げたことをと笑うだろうか．しかしこれは現代論理学の創始者ゴットロープ・フレーゲが「数とは何か」という問題に取り組んだ時に実際に直面した困難なのである（この問題は「シーザー問題」と呼ばれている）．

「数とは何か」という問題にアプローチする際に，私たちは誰もが数であることを認めている具体的な実例から議論を始めることができない．これが数学の哲学を特徴づける困難であり，そして数学の哲学の面白いところである．**数学的構造主義**はこの困難に対する一つの反応として提唱された．非常に大雑把にいうと構造主義は，数などの個別的な対象を問題にすることを止めよう，という提案である．数学は個々の数それぞれ，あるいはそれらの持つ内在的な性質を扱うものではなく，自然数ならば自然数の全体，実数ならば実数の全体が作る構造を研究するものである．従って個々の数についてそれが何かを問題にするのは無意味だ，と構造主義は主張する．

このような主張はもっともに思われる部分もあれば，直観に反しているように思われる部分もある．例えば抽象代数においては個々の具体的な対象ではなく，構造一般についての研究が行われる．このような分野については構造主義の主張は正しいように思われる．しかしその一方で世界中の研究室で π の計算が行われてお

り，何桁まで計算できたかを競っている．そこで行われているのは π という特定の一個の数についての計算であり，π を含む何らかの構造の性質が研究されているのではないようにも思われる．また例えば整数論に従事している数学者たちは彼らが扱っているのが具体的な個々の数であるという直観を持っている．こういった直観に反して，構造主義を主張するメリットは何だろうか．このテキストでは数学的構造主義が主張された背景，構造主義のバリエーション，それぞれのメリットとデメリットについて考察する．

2　論理主義とベナセラフのパズル

2.1　論理主義

数学の哲学における困難の一つは，数の実例を提示することができないということである．これに対する一つの答え方は，実際に数であると認められるような「実物」を提示し，それが数であると主張することである．この方法を追求したのがゴットロープ・フレーゲであった．フレーゲはそれを純粋に論理学の道具立てのみによって達成しようとした．それゆえ彼の立場は現在では**論理主義**と呼ばれている．

論理主義が生まれた背景について少し解説しよう．そのためには 19 世紀に解析学において起こった大きな改革について話をしなければならない．解析学においては連続や極限の概念が重要であるが，従来の解析学ではこれらの概念について厳密な定義が行われていなかった．そのため解析学における証明はある程度，曖昧な概念を含み，それゆえに数学者の直観に委ねられているところがあったのである．しかしながらより多くの学生に解析学を効率よく教えるためには，このような直観への依存を排除して，証明を明確な規則に従った手続きにしなければならない．そこでフランスのオーギュスタン＝ルイ・コーシーやドイツのカール・ワイアーシュトラースは解析学の厳密化を推進した．そしてその結果，実数の概念は有理数についての理論と集合論から定義できることが分かった．実数という特別な数の存在を想定せずとも，有理数と集合があれば私たちは実数論を展開することができるのである．さらに言えば有理数は整数と集合によって，整数は自然数と集合によって定義することが可能である．従って結局のところ解析学を行うには自然数と集合があれば充分だということになったのである．

哲学的な観点から見れば，解析学の厳密化は，実数の概念を自然数と集合という概念に還元する過程であったと見ることもできる．哲学でいう還元とは，ある概念を別のより基本的（明証的）と思われる概念によって説明することである．より具体的に言えば，ある概念 A が別の諸概念 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ に還元されるということは，概念 A に対する言及が現れる任意の言明を，概念 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ に対する言及が現れる（そして概念 A に対する言及は現れない）言明に置き換える体系的な方法がある，ということである．非常に単純な例を挙げれば選言の概念は連言と否定の概念に還元できる．任意の「P または Q」という言明は，「P でなくかつ Q でない，ということはない」という連言と否定を使った（そして選言を含まない）論理的に同値な言明に置き換えることができるからである．もっともこの場合，選言よりも連言と否定の方がより基本的あるいは明証的だと言えるとは限らないので，還元の例とは言えないかもしれない．

例えば実数を有理数と集合に還元する一つの方法は，実数を有理数の**切断**と同一視することである．有理数の切断とは次の条件を満たす有理数の部分集合の対 (A, B) である．

1. $A \cup B = \mathbf{Q}$（ただし $\mathbf{Q}$ はすべての有理数の集合）
2. $\forall x \in A \forall y \in B (x < y)$
3. B に最小元は存在しない．

つまり切断とは有理数のすべてを大小の順序で一列に並べ，ある点から「下」の有理数全部と，同じ点から「上」の有理数全部に分けたものである．3 の条件は例えば 0 以下の有理数の集合と 0 より大なる有理数の集合の対と，0 より小なる有理数の集合と 0 以上の有理数の集合の対の両方が切断になることを防ぐためにある．上の定義では前者は切断ではなく，後者は切断である．このように切断を定義すると，実数の集合と切断の集合の間に 1 対 1 の対応をつけることができ，かつ実数上の大小関係や，実数の上の演算にも，切断上の順序関係，切断の上の演算を対応させることができる．まず実数と切断の対応であるが，任意の実数 x に対しては切断 $(\{q \in \mathbf{Q} : q < x\}, \{q \in \mathbf{Q} : x \leq q\}$ を対応させれば良い．これを (A_x, B_x) によって表すことにする．任意の切断 (A, B) に対して，A は上に有界な実数の部分集合なので，実数の連続性より A の上限が存在する．それを $sup(A)$ によって表す．切断上の順序関係 $\leq$ を $(A, B) \leq (A', B') \iff A \subseteq A'$ によって定義する．また切断上の和を

$$(A, B) + (A', B') = (\{q + q' : q \in A, q' \in A'\}, \{q + q' : q \in B, q' \in B'\})$$

によって定義する．

実数という概念は複雑であり，また捉えがたいところがある．しかし自然数と集合は一見したところ単純かつ明解であるように思われる．従って実数についての理論を自然数論と集合論に還元することは，実数の概念を明瞭にすることに貢献する．さらに自然数論と集合論に関しても 19 世紀末に厳密な定式化が行われた．自然数論についてはイタリアのジューゼッペ・ペアノが，集合論についてはリヒャルト・デデキント，ゲオルグ・カントールが，それぞれ定式化を試みたのである．

論理主義はこの還元の過程をさらに一歩進める．フレーゲは自然数についての私たちの一般的な理解が混乱していて明証的ではないものと考え，それを論理学の概念に還元することを目指した．このプロジェクトが完遂されれば自然数論から解析学までを含む数論はすべて論理学の概念と原理によって説明されることになる．論理学は最も確実かつ普遍的な原理である．従って論理主義のプロジェクトは，数学の確実性を揺るぎないものにし，また数という概念にまつわる不明瞭さも払拭するだろうと期待された．

フレーゲの方法は具体的には次のようなものである．まず彼は論理学の対象として，個体と概念という二つの存在者を想定する．一般的に命題とは個体と概念が結びつくことによって形成されている．例えば［ソクラテス］は人間だという命題はソクラテスという個体と＜…は人間である＞という概念が組み合わされることで成立している[*1]．

フレーゲは概念同士の間の**等数性**の関係に注目した．これはある概念と別な概念が，正確に同じ数の対象に当てはまるときに，その二つの概念の間に成り立つ関係である．たとえば＜…はペガサスである＞と＜…はサンタクロースである＞はどちらも当てはまる対象を一つも持たない．従ってこれらは等数的である．また＜…はビートルズのメンバーである＞と＜…は 10 以下の素数である＞はどちらも 4 個の対象に当てはまるため，やはり等数的である．概念同士の等数性の概念は数の概念に訴えることなしに，それぞれの概念が当てはまる対象の間に全単射が存在するということによって正確に定義をすることが出来る．

ある概念 F に対して＜…は F と等数的である＞という概念は，すべて F が当てはまる対象の数と，同じ数の対象に当てはまる概念に当てはまり，そしてそれ以外の概念には当てはまらない．例えば F が＜…はペガサスである＞という概念だとすると＜…は F と等数的である＞という概念は＜…はサンタクロースである＞，＜…は最大の自然数である＞など，当てはまる対象を持たない概念すべてにあてはまり，そしてそれ以外の概念には当てはまらない．従って＜…は F と等数的である＞は＜…は当てはまる対象を持たない概念である＞

[*1] このテキストでは概念や命題に言及する時は読みやすさを考慮して，それらを表わす表現をそれぞれ＜＞と［］でくくることにする．

ということに等しい．同様にして例えば＜…は＜…はビートルズのメンバーである＞と等数的である＞は＜…は 4 個の対象に当てはまる概念である＞という概念と同一視することができるだろう．しかし後者においては 4 という数に言及しているのに対して，前者においてはいかなる数にも言及していない．このようにしてフレーゲは数に言及している言明を，そのような言及の現れない，かつ純粋に論理的な語彙だけを用いた言明に還元したのである．

しかしここまででは単にある概念が n 個の対象に当てはまるということを数に言及せずに定義したにすぎない．フレーゲが求めたのは任意の数詞 n の指示する対象が何かを明かにすることである．そこでフレーゲは＜…は F と等数的である＞という概念の外延を考え，そしてそれこそが F の数だとみなした．ある概念の外延とはその概念が当てはまる諸対象のことである．例えば＜…はビートルズのメンバーである＞という概念の外延はジョン・レノン，ポール・マッカートニー，ジョージ・ハリスン，リンゴ・スターである．＜…は＜…はビートルズのメンバーである＞と等数的である＞という概念の外延には，例えば＜…は 10 以下の素数である＞などが含まれる．例えば数 0 は＜…は＜…はペガサスである＞と等数的である＞という概念の外延である．また数 4 は＜…は＜…はビートルズのメンバーである＞と等数的である＞という概念の外延である．フレーゲは数 0 を定義し，さらに任意の数 n に対して，その次の数が常に存在すること，そのような数は無限に存在することを示した．そしてまたそのようにして定義された数が，通常の自然数に求められる性質のすべてを持っている（より具体的にいえばペアノ算術の公理を満たす）ことを示した．このようにしてフレーゲは「数とは何か」という問いに対して，非常に具体的かつポジティブな仕方で答えを与えたのである．

同じような試みはカントールによっても行われていた．フレーゲが概念という論理学の道具を用いて数を定義したのに対してカントールは集合を基礎にしていた．しかしその点を除けば彼らの数の定義はほぼ同じである．集合や概念がもしも十分に明証的なものであるならば，彼らの試みは数概念を明らかにすることに貢献したものだと言えるだろう．しかしながら彼の方法には大きな欠陥があることがすぐに明らかになった．バートランド・ラッセルが彼らの体系の中に発見したパラドクスのためである．これらのパラドクスは現在では**ラッセルのパラドクス**と呼ばれている．ただしカントールの体系に関しては，ラッセルと独立にエルンスト・ツェルメロも同じパラドクスを発見していた．またそれら以外にも，ブラリ＝フォルティのパラドクス，カントールのパラドクス，リシャールのパラドクス，ベリーのパラドクスなど，集合論と論理に関係する様々なパラドクスが相次いで発見された．

2.2 ラッセルのパラドクス

ラッセルのパラドクスには二種類のものがあり，一つはフレーゲの論理体系において発見されたもの，もう一つはカントールの集合論において発見されたものである．ここでは集合論のパラドクスに話を限って，集合論のどこにそれを生じさせた病因があったのかを考察する．

ラッセルのパラドクスは大雑把に言うと「自分自身を含まない集合すべてからなる集合」を考えることによって生じる．この集合を R と呼ぶことにしよう．さて R は R 自身を含むだろうか．仮に R が R を含むと仮定しよう．このとき R の要素であるための条件，すなわち自分自身を含まないという条件を R 自身が満たすことになる．従って R は自分自身を含まない．これは矛盾である．逆に R が R を含まないと仮定しよう．このとき R の要素であるための条件を R 自身が満たしている．従って R は R の要素でなければならない．従ってやはり矛盾が生じる．

このようなパラドクスを生じさせる集合論には何か間違った前提が含まれているはずである．そこでこのパラドクスがどのような仮定から生じるのかをもう少し詳細に検討しよう．そのためには集合という概念がど

のように捉えられているのかを見なければいけない．カントールは集合を次のように定義している（Cantor [4]）．

> 私たちは「集合」ということで，確定し互いに区別される，私たちの直観あるいは思考の諸対象 m が集められた全体 M を意味する．これらの対象は M の「要素」と呼ばれる．

「確定し互いに区別される諸対象」とはいかなるものなのかが具体的に明らかにされていない．そこで次のように定義する．

Definition 2.1 (確定的対象)**.** ある対象 x が**確定し互いに区別される**のは，任意の対象 y に対して $x = y$ か $x \neq y$ のどちらか一方（そして一方だけ）が成り立つことが確定している場合である．私たちは確定し互いに区別される対象を以後**確定した対象**あるいは**確定的対象**と呼ぶことにする．

私たちが集合を特定する方法は二通りある．一つはその要素を列挙する方法である．例えば $a_1, a_2, \ldots, a_n$ という対象が与えられれば，これらすべてを含み，そしてそれ以外を含まない集合が特定される．そのような集合は $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ と表記される．このように集合の要素を列挙することによって集合を定義する方法を，集合の**外延的定義**と言う．

もう一つはある集合の要素であるための必要十分条件を指定することによって，その集合を特定する方法である．この方法を**内包的定義**とする．例えば素数の集合，犬の集合，2 乗が 2 より小さい有理数の集合，何らかの自然数 n に対して $1/n$ と等しい有理数の集合，などなど．これらの集合はそれぞれ $\{x : x$ は素数 $\}$, $\{x : x$ は犬 $\}$，$\{x : x$ は有理数でありかつ x の 2 乗は 2 より小さい $\}$，$\{x :$ ある自然数 n に対して $x = 1/n\}$ と表記される．

どのような条件でも確定した集合を定義できるのではないことに注意しよう．例えば「x は大きな自然数である」というような条件は確定した集合を定義しない．なぜならば「大きな自然数」という概念は曖昧だからである．100 は大きいのか，1000 は大きいのか，$10^{10^{10}}$ ならば大きいのか．$10^{10^{10}}$ は私たちの日常的な尺度から言えば非常に大きな数であると言えるが．しかしそれよりも大きな自然数は無数に存在するし，例えば $100^{100^{100}}$ に比べれば，無に等しいほど小さい．しかし例えば「$10^{10^{10}}$ より大きな自然数」という条件は集合を正確に定義する．どんな対象についても，それが $10^{10^{10}}$ より大きな自然数であるかどうかは完全に確定しているからである．

Definition 2.2 (確定的条件)**.** いかなる対象に対しても，当てはまるか当てはまらないかのどちらか一方（そして一方だけ）が確定している条件を**確定的条件**と呼ぶ

私たちは何らかの確定的条件に対して論理的な操作を施した条件もまた確定的条件であると考える．例えば F, G が確定的条件であるとき，F を満たさないこと，F か G のどちらかを満たすこと，F と G の両方を満たすこと，F を満たすならば G を満たすこと，すべての対象に対して F を満たすこと，ある対象に対して F を満たすことはすべて確定的条件である．

C が確定的条件であるとき，

$$\{x : C(x)\}$$

は一つの確定した集合を定義する．この時 C をその集合の**定義条件**と呼ぶことにする．

対象 a が集合 A の要素であることを $a \in A$ によって表す．また a が A の要素でないことを $a \notin A$ によっ

て表す．集合 A の定義条件が C であるならば，任意の対象 a に対して

$$a \in A \iff C(a) \tag{1}$$

が成り立つ．

ここで私たちは次のことを要請する：

要請：任意の集合 A に対して，A の要素であるかどうかは確定的条件である．

もし集合 A が外延的あるいは内包的に定義されていればこの前提は成り立つ．これは次の議論によって示される．A が外延的に定義されている時，$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ とできる．各 a_i は集合の要素なので確定的である．従って任意の対象 x について $a_i = x$ かどうかは確定している．よって $x \in A$ かどうかも確定的である．A が内包的に定義されている時，ある確定的条件 C が存在して $A = \{x : C(x)\}$．従って (1) より任意の対象 x に対して $x \in A \iff C(x)$．従って A に属するかどうかは確定的条件である．問題は A が外延的にも内包的にも定義されていない場合があるかもしれない，ということである．そこで私たちはそのような場合にも A の要素であるかどうかは確定的であるということを要請するのである．

ここで集合の同一性の条件を見てみよう．集合 A の要素がすべて集合 B の要素になっているとき，A は B の**部分集合**である，と言われ，

$$A \subseteq B \quad \text{あるいは} \quad A \subset B$$

と書かれる．二つの集合 A, B が**同一**であるのはこれらが互いに他方の部分集合になっているとき，すなわち

$$A \subseteq B \quad \text{かつ} \quad B \subseteq A$$

が成り立つ時である．言い換えると A と B が同一であるのは，それらが正確に同じ要素を持っている場合である．

さてこの定義に照らして，集合が確定的対象であるかどうかを考えよう．上の確定的対象の定義から，集合 A が確定的対象であるのは任意の対象 X に対して $A = X$ か $A \neq X$ のどちらかが確定するということであった．X が集合でない場合はもちろん $A \neq X$ である．そこで X は集合であるとしよう．このとき $A = X$ は $A \subseteq X$ と $X \subseteq A$ の両方が成り立つことと同値である．上で要請したように集合の要素であるかどうかは確定的条件であるため，任意の $x \in A$ について x が X の要素であるかどうかは確定している．従って $A \subseteq X$ は確定的である．逆に任意の $x \in X$ について x が A の要素であるかどうかも確定しているので，$X \subseteq A$ も確定的である．従って $A = X$ は確定的条件である．従って任意の集合は確定的対象である．

集合が確定的対象であるということとカントールによる集合の定義より，集合によって構成される集合も可能である．特にある確定的条件を満たす集合の全体は集合である．

自分自身を要素として含むという条件が確定的条件であるかを考えよう．任意の対象 X を考える．X が集合でないなら $X \notin X$ であり，従って $X \in X$ の真偽は確定している．X が集合の場合を考えよう．任意の $x \in X$ を考える．このとき x は確定的対象である．従って $x = X$ の真偽は確定している．よってある $x \in X$ に対して $x = X$ が成り立つかどうかも確定している．よって $X \in X$ の真偽は確定している．よって任意の対象についてそれ自分自身を要素として含む含むという条件は確定的である．従ってその否定である，それ自身を要素として含まないということも確定的条件である．これと前段落の結論から，自分自身を要素として含まない集合すべてからなる集合，すなわち

$$R = \{x : x \notin x\}$$

と定義される集合が存在するということが帰結する．この集合をラッセル集合と呼ぶ．ラッセル集合に対して 1 を適用すると，任意の集合 X に対して

$$X \in R \iff X \notin R \tag{2}$$

が成り立つ．X は任意であるから，X に R 自身を代入しても 2 は成り立つ．従って

$$R \in R \iff R \notin R \tag{3}$$

が導かれる．しかしながらこれは矛盾である．

以上のようにラッセルのパラドクスが導出された過程を詳細に検討していくと，パラドクスを生じさせた原因がよりはっきりする．私たちはすべての集合について，その集合の要素であるかどうかが確定的条件であることを要請した．それによって任意の集合は確定的対象であるということになり，そこからさらに任意の集合について，それが任意の他の集合（それ自身も含む）に属するか否かが確定的条件とされたのである．ラッセル集合 R の定義はこの事実を利用したものである．しかしこのようにして定義された R については $R \in R$ と $R \notin R$ の両方が帰結する．すなわち R についてはそれが R に属するか否かが確定できないのである．従ってこのパラドクスに対する最も明白な対処法は，集合のメンバーシップが確定的条件ではないということ，すなわち $x \not X$ が任意の対象 x と任意の集合 X について確定的であるわけはないということを認めることであるように思われる．一般に有意味な命題とは，その真偽が確定しているものであると考えられるので，このことは $x \not X$ が有意味な命題でない場合があることを認めることになる．この方向での修正を追求したのがラッセルであった．しかしながらラッセルがその結果として構築した論理体系は様々な理由から大きな批判をうけることになった．このテキストではその詳細には立ち入らない．ここでは現代において，カントールの集合論に代わって数学の基礎とみなされるようになった公理的集合論について見ていくことにしよう．

2.3 公理的集合論

カントールの集合論の問題は集合という概念が非常に一般的に定義されており，その概念に当てはまる対象が極めて「多く」存在しすぎたということであると言える．例えばすべての集合の集合，集合でない対象（確定的対象）すべての集合などがカントールの集合論では許容されており，そしてこのような野放図さがパラドクスを生じさせているのである．しかしながらこのような集合は通常の数学にとっては必ずしも必要ではない．従って数学を行うのには十分だが，しかしより狭い範囲に集合を制限し，パラドクスを生じさせないようにすればよいのである．公理的集合論が目指したのはこのようなことだった．

公理的集合論について論じる前に，そもそも公理，公理系とは何かということについて簡単に触れておこう．公理とはある数学理論において前提とされる命題であり，公理系とは一連の公理から論理的に導出（証明）される命題の全体である．また明示的に，これこれの命題（そしてそれらのみ）を公理として受け入れるということを宣言して，そこから証明される結論のみを正当化された命題（定理）として受け入れる，という方法論を公理的方法（公理論）と呼ぶ．現代の数学においては公理的方法は当たり前のものとなっている（公理的でない理論は数学として認められないほどである）が，しかしこれはごく最近，20 世紀になってから一般化した傾向である．例えば前節で紹介したカントールの集合論は厳密な公理体系ではなかった．そのために何が集合として認められるのか，あるいは何が集合の要素となりうるのかということに関して議論の余地があったのである．

ツェルメロはこのような議論の余地のない厳密な公理系として集合論を再構築することを目指した．彼が構築した体系は以下のようなものであった．

言語：論理定項と可算無限個の変数の他には 2 項述語として $\in, \subseteq, =$ を含む.

公理：

- 部分集合の公理：$\forall xy(x \subseteq y \iff \forall z(z \in x \to z \in y))$
- 外延性の公理：$\forall xy(x = y \iff (x \subseteq y \wedge y \subseteq x))$.
- 空集合の公理：$\exists x \forall y(y \notin x)$.
- 対の公理：$\forall xy \exists z \forall w(w \subseteq z \iff (w = x \vee w = y))$
- 和の公理：$\forall x \exists y \forall z(z \in y \iff \exists w(z \in w \wedge w \in x))$
- べき集合の公理：$\forall x \exists y \forall z(z \in y \iff z \subseteq x))$
- 分出公理：$\forall x \exists y \forall z(z \in y \iff (z \in x \wedge \phi(z)))$

ただし分出公理における $\phi(z)$ はこの公理系の言語における任意の論理式である．分出公理は集合の内包的な定義を可能にするものである．しかしながらラッセルのパラドクスはここからは導かれない．分出公理はすでに存在することが分かっている集合から，特定の論理式によって定められた条件を満たす要素だけを選び出して集合を作ることができるということを述べている．すなわち何らかの集合 X と論理式 $\phi(x)$ に対して

$$\{x : x \in X \wedge \phi(x)\}$$

によって定められる集合の存在を保証するのみである．従ってそもそもラッセル集合のような集合は定義できない．あえてしようとするならばそれはある集合 X に対して

$$R = \{x : x \in X \wedge x \notin x\}$$

というような定義になるだろう．しかしこの集合からは矛盾は帰結しない．$R \in R$ と仮定すると，$R \in X$ かつ $R \notin R$ が帰結する．しかしこれは仮定と矛盾する．従って $R \in R$ は成り立たない．よって $R \notin R$ である．ラッセル集合のケースではこのことから R が R の定義条件を満たすことになるのであるが，現在のケースではそうはならない．なぜならば R の定義条件を満たすにはさらに $R \in X$ が言える必要があるからである．ここから結論できることはせいぜい R が X の要素ではないということである．

このようにして公理的集合論ではラッセル集合のような，矛盾を生じさせる集合の形成がブロックされている．またこの集合論の中で自然数（とみなせるもの）を定義することも可能である．それは次のような定義である．

$$0 = \varnothing$$
$$n' = n \cup \{n\}$$

ただし n' は n の次の数を表わす．このように定義された「自然数」は，私たちが自然数に対して求める条件を満たしている．例えば最小の数が存在する，すべての自然数にその次の自然数がある，どの自然数についてのその次の自然数は一意である，などなどである．

公理的集合論は通常の数学を行うのに十分な基礎を提供するものであり，現在では数学を行うための標準的な言語として，あるいは概念の枠組みとして通用している．普段数学を行う際には数が何であるかを意識する必要はない．しかしもし数とは何かを問われたならば，私たちはツェルメロの仕事を参照して，これが数だと言うことができる．

しかしこのようなアプローチによって「数とは何か」という問題に答えることには，重大な欠陥があることをポール・ベナセラフは指摘した．

2.4　ベナセラフのパズル

ベナセラフの論文 "What numbers could not be"（Benacerraf [3]）は論理主義的アプローチによる数の説明に対し決定的な反論を提示し，論理主義的アプローチによって定義された数が本当の数ではありえないことを論証した．彼の論文は論理主義的アプローチによる数の定義を教えられた二人の子供についての興味深いフィクションを描写する．

アーニーとジョニー*2はそれぞれ二人の敵対する論理主義者の子供である．彼らは通常の子供とは異なる方法で数を学んだ．彼らはまず集合論を学び，そして数がかくかくしかじかの集合であると教えられたのである．彼らはこのようにして最小の数が何であるかを学び，任意の数に対してその次の数が何であるかを学び，数の間の大小関係を学んだ．その際，その大小関係は再帰的に決定されており，従って彼らは任意の二つの数について，大小関係を実効的に判定することができた．その大小関係に関して，彼らは数の任意の部分集合に最小の要素があることを知った．また彼らは足し算や掛け算の方法を学んだ．そしてそれらに関してペアノの諸公理が成り立つことを証明することが出来た．また彼らは数を数えあげる（特定の物の数を数えるのではなく，小さい数から一つ一つ順番に数を諳んじるという意味で）ことができるようになり，そして対象の集まりの数を数えられるようになった（後者はその集まりと彼らが数え上げる数との 1 対 1 対応をつけることによってなされる）．彼らは数に関してまったく十分な知識を持っている．つまり通常の子供たちが数について知っているべきこと，数を使ってできることはアーニーとジョニーにもできる．それだけではなく彼らは他の子供たちに対してある種の優位に立っているとも言える．なぜなら他の子供たちが例えばペアノの公理のようなものを無条件に受け入れさせられているのに対して，彼らにとってそれらは彼らの持つ数についての知識から証明できることなのである．

ここまではアーニーとジョニーはまったく同じ状況にあった．しかし二人が数について話をしていくうちに，二人の間には数について意見の不一致があることが判明した．アーニーもジョニーも数は特定の集合であると考えているので，ある数が別の数の要素であるかどうかということを問うことができる．ところが，アーニーが 3 は 17 に属していると言うのに対して，ジョニーはそんなことはないと言うのである．この不一致はどのようにして生じたのだろうか．実はアーニーとジョニーの二人はそれぞれ異なる数の定義を持っていたのである．アーニーにとっての数とは

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots$$

という集合の列であるのに対して，ジョニーにとっては

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \ldots$$

という集合の列であった．より正確に言えばアーニーの知る数は前節のように

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing \\ n' &= n \cup \{n\} \end{aligned}$$

と定義されているのに対して，ジョニーの知る数は

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing \\ n' &= \{n\} \end{aligned}$$

*2 それぞれ Ernst Zermelo と John von Neuman に因んでいると思われる．

と定義されている[3]．つまり彼らの数の説明は，3 や 17 などの数詞に対して異なる集合をその指示対象として割り当てていたのである．

$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ と $3 = \{\{\{\varnothing\}\}\}$ の両方が正しいということはありえない．従ってアーニーかジョニーの少なくとも一方は間違っていることになる．すると可能性としては (1) アーニーが正しく，ジョニーが間違っている，(2) アーニーが間違っていて，ジョニーが正しい，(3) アーニーもジョニーも間違っている，のいずれかであるということになる．ここでベナセラフはアーニーとジョニーのどちらか一方を正しいとし，他方を間違いであるとする理由は数学においては存在しないという．アーニーとジョニーはどちらも数について十分な理解を持っている．彼らの不和は数学が数について要求する以上の性質から生じている．もし私たちがアーニーとジョニーのどちらかをひいきするならば，その理由をあげなければならないが，しかしそれは不可能なのである．従って結論は (3)，すなわちアーニーとジョニーのどちらも間違っているということになる．

同じことは数を特定の集合と同一視するどのようなアプローチに対しても当てはまる．それゆえ数は特定の集合ではありえない．さらに言えばこの結論は集合だけに止まらない．実際には数をどんな特定の対象と同一視するアプローチも同じ議論によって間違いであることが示される．「数とは何か」という問いに対して，これが数だと見なせる何らかの対象を提示するというアプローチは，そもそもの方針として誤った方向を向いている，とベナセラフは言う．従ってフレーゲおよびその伝統に連なる哲学者たちのアプローチは，数の説明としては根本的に不適切だということになる．

フレーゲのアプローチが誤っている理由としてベナセラフは，それが不適切な同一性を主張しようとしていることをあげる．一般に数詞 n を含む同一性言明 $n = s$ は s がどのようなものであるかによって以下の三つのタイプに分類される．

1. s もまた何か別の数を表わす数学的な表現．例えば $5^7 = 4,802$.
2. s は「…の数」という表現．例えば $7 =$ 小人の数.
3. s は上記の二つと異なる指示表現．例えば $7 = \{\{\{\varnothing\}\}\}$ や $7 =$ ジュリアス・シーザー.

これらのうち最後の同一性言明は「無意味」または「意味論的に不適切」（unsemantical）だとベナセラフは言う．彼によれば同一性言明が有意味であるのは，同一性を主張されている二つの対象が同種のもの，同じカテゴリーに属するものだということが明らかであり，かつその同一性の真偽を決定するために有効な条件が，それらを同じカテゴリーのものとして個体化している条件であることが明らかな場合のみである．例えば街灯柱は色や質量などによって個体化されうる．そしてこれらの条件は二つの街灯柱が同一であるかどうかを判定するために使うことができる．数は素数であるとか 17 より大きいといった条件によって個体化されうる．そしてこれらの条件は二つの数が同一であるかどうかを判定するために使われうる．しかしながらある街灯柱をこれらの条件によって個体化することはできないし，数を色や質量などによって個体かすることはできない．それゆえある街灯柱がある数と同一であるかどうかを問うことは無意味なのである．これらはどちらも「存在者（entity）」というカテゴリーに属するものであると考えられるかもしれないが，しかしこのカテゴリーは広すぎて，対象を存在者のカテゴリーに属するものとして個体化する条件がどのようなものであるかが分からない．従って二つの存在者が同一であるかを問うことは常に有意味であるとは限らない．

数について上記の 1 と 2 のタイプの同一性だけでは満足せず，3 のタイプの同一性を問題にしたがる，すなわち「数とは何か」という問題について「より深く」探求を進めたがる哲学者に対して，ベナセラフはそのような探求は算術がそもそもどのようなものであるかを見誤っている，と諫める．アーニーとジョニーについて

[3] 後者の定義はフォン・ノイマンによる．

の例からベナセラフは，いかなる対象であれ再帰的な列として与えられているものは自然数として十分であると論じる．つまり数であるためには，それらが個々の対象として何であるかは重要ではない．個体の集まりが全体として作る構造，そしてその構造を生み出している個体間の関係が，それらが自然数であることにとって重要なのである．ここからベナセラフは，数とは対象ではなく抽象的な構造であり，算術とはそのような抽象的な構造についての科学なのだと結論する．

ベナセラフの論文は，数を特定の個体と同一視することによって数を説明しようとする哲学的伝統を完全に誤ったものとして退け，算術（あるいは数学）が抽象的な構造についての研究であるとする数学的構造主義の立場を明確に打ち出したという点で画期的な業績である．しかし私たちはここからさらに，構造とは何であるのか，そして数学的言明を正確にどのように解釈したらよいのかを問わなければならない．次節以降ではこれらの問題について考えていこう．

3　集合論的構造主義

ベナセラフは彼の論文の中で言及していないが，リヒャルト・デデキントはフレーゲと同時代にすでに自然数をその構造的特徴に注目して研究していた．デデキントは「数とは何か，何であるべきか（Was sind und was sollen die Zahlen)」と題した論文（Dedekind [5]）において，興味深い自然数の特徴付けを行っている．ここではデデキントによる自然数の定義を簡単に紹介しよう．そのためにはいくつかテクニカルな用語についての予備的な知識が必要になる．

3.1　集合論の予備知識

Definition 3.1 (順序対)**.** 対象 x と y を順序を考慮して並べた (x, y) を x と y の**順序対**と呼ぶ．二つの順序対 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ が等しいのは x_1 と x_2 が等しく，かつ y_1 と y_2 が等しいとき，そしてそのときに限る．

Definition 3.2 (直積)**.** 集合 A と B に対して，A の要素と B の要素の順序対からなる集合，すなわち $\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ によって定められる集合を A と B の**直積**と呼び，$A \times B$ によって表わす．

集合 A に対して $\mathbf{1} \times \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}$ を A^n によって表わす．ただしここで $\mathbf{1} = \{\varnothing\}$ とする．

Definition 3.3 (関係)**.** $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ の任意の部分集合を $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **上の** (n **項**) **関係**と呼ぶ（$A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ であるときには A 上の (n 項) 関係と呼ぶ）．A, B 上の 2 項関係 R が $(a, b) \in A \times B$ を含むとき，R は a **を** b **に対応させる**，あるいは**関係づける**という．

関係 $R \subseteq A \times B$ と A の部分集合 M に対して，$\{b \in B : \exists a \in M.(a, b) \in R\}$ によって定義される集合を M **の** R **による像**と呼び，$R[M]$ によって表わす．特に $R[A]$ を R の**値域**と呼ぶ．また任意の $N \subseteq B$ に対して $\{a \in A : \exists b \in N((a, b) \in R\}$ によって定義される集合を N **の** R **による逆像**とよび，$R^{-1}[N]$ によって表わす．

Example 3.4. (1) A をアルファベットの集合とし，S をアルファベットからなる任意の文字列（長さ 0 の文字列も含むものとする）の集合とする．このとき例えば文字列 σ がアルファベット α を含んでいるような (α, σ) すべての集合 C は A, S 上の 2 項関係である．$C[\{\alpha\}]$ はアルファベット α を含む文字列の全体を表わす．$C[\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}]$ は $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ のうちの少なくともどれか一つを含む文字列の全体を表わす．$C[\{\alpha_1\}] \cap C[\{\alpha_2\}] \cap \cdots \cap C[\{\alpha_n\}]$ は $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ のすべてを含む文字列の全体を表わす．

(2) $\mathbf{N}$ は自然数の集合とする．任意の $x, y, z \in \mathbf{N}$ に対して x を y で割った余りが z に等しいような (x, y, z) のすべてからなる集合 Mod は $\mathbf{N}$ 上の 3 項関係である．この関係は別な見方をすれば $N \times N, N$ 上の 2 項関係とも，あるいは $N, N \times N$ 上の 2 項関係とも考えることができる．前者のよう j に考えたとき，たとえば $Mod^{-1}[\{3\}]$ は x を y で割った余りが 3 になるような $(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ の集合を表わす．後者のように考えたとき，例えば $Mod^{-1}[\{(2, 3)\}]$ は x を 2 で割った余りが 3 になるような $x \in \mathbf{N}$ の集合を表わす．

(3) $\mathbf{Z}$ は整数の集合とする．$x^2 = y$ を満たす $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ すべての集合 $Square$ は $\mathbf{Z}$ 上の 2 項関係である．また例えば $Square^{-1}[\{4\}] = \{-2, 2\}$ である．

Definition 3.5 (関数)**.** A, B はそれぞれ集合とする．A, B 上の 2 項関係 f が，任意の A の要素に対してただ一つの B の要素を対応付けるとき，すなわち f が

$$\forall a \in A \exists b \in B((a, b) \in f)$$
$$\forall b, b' \in B(\exists a \in A((a, b) \in f \& (a, b') \in f) \Rightarrow b = b')$$

を満たすとき，f は A **から** B **への関数**と呼ばれる．f が A から B への関数であることを $f : A \to B$ と書くことによって表わす．f が $a \in A$ に対応させる B の要素を $f(a)$ によって表わす．$f : A \to B$ に対して，A を f の**始領域**，B を f の**終領域**と呼ぶ．

集合 A に対して A^n から A への関数を A **上の** n **項関数**，あるいは n **項演算**と呼ぶ．またこの時の n をこの関数の**項数**と呼ぶ．

関数は 2 項関係の一種であるため，像と逆像の概念と表記は関数にも同じように使われることに注意しよう．

Example 3.6. (1) J を現在日本国籍を持つ人間の集合とする．S を漢字，ひらがなカタカナからなる文字列の集合とする．任意の日本人に対してその戸籍に登録されている名前を対応させることによって J から S への関数が得られる．この関数を f によって表わすと $f[J]$ は現在の日本人の名前の集合になる．また $M \subseteq J$ を日本人男性の集合とすれば $f[M]$ は日本人男性の名前の集合になる．また $f^{-1}[\{$“山田太郎”$\}]$ は “山田太郎” という戸籍上の名前を持つ現在の日本人の集合を表わす．

(2) 任意の自然数 n に対して $n + 1$ を対応付けることによって，自然数の集合 N からそれ自身への関数が得られる．この関数は**後続者関数**と呼ばれる．この関数を s によって表わすと $s[N] = N - \{0\}$ である．

(3) C をあるときの小選挙区選挙における有権者の集合，D をその選挙で当選した議員の集合とする．C の任意の要素 c に対して c の属する選挙区の当選者を対応付けることによって C から D への関数が得られる（小選挙区制では各選挙区に対して当選者が一人であることに注意しよう）．

(4) Example 3.4(3) は関数である．それ以外は関数ではない．

(5) 任意の実数 x, y に対してその X の y 乗根を対応付けることによって R 上の 2 項演算が得られる．

(6) 任意の集合 A に対して，その元は $\mathbf{1}$ から A への一つの関数と同一視することができる．一方，定義より $\mathbf{1} = A^0$ であるから，$\mathbf{1}$ から A への関数は A 上の 0 項演算である．従って A の任意の元は A 上の 0 項演算と同一視できる．

(7) 任意の集合 A に対して，各々の元をそれ自身に対応付ける写像を A **上の恒等写像**と呼び，id_A によって表わす

Definition 3.7 (関数の合成)**.** 関数 $f : A \to B, g : B \to C$ が与えられているとき，任意の $a \in A$ に対して $h(a) = g(f(a))$ を満たす関数 $h : A \to C$ が一意的に存在する．この関数を f **と** g **の合成**と呼び，$g \circ f$ によっ

て表わす．

Definition 3.8 (関数の積)**.** 関数 $f : A \to B, g : C \to D$ が与えられているとき，任意の $(a, c) \in A \times C$ に対して $h((a, c)) = (f(a), g(c))$ を満たす関数 $h : A \times C \to B \times D$ が一意的に存在する．この関数を f **と** g **の積**と呼び，$f \times g$ によって表わす．

Definition 3.9 (単射, 全射)**.** $f : A \to B$ が**単射**であるのは，任意の $a, a' \in A$ に対して $a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$ が成り立つときである．

$f : A \to B$ が**全射**であるのは，任意の $b \in B$ に対してある $a \in A$ が存在して，$f(a) = y$ が成り立つときである．

$f : A \to B$ が単射でありかつ全射であるとき，f は**全単射**と呼ばれる．

$f : A \to B$ が全単射であるとき，$g \circ f = id_a, f \circ g = id_B$ を満たす $g : B \to A$ が一意的に存在する．このような g を f **の逆関数**と呼び f^{-1} によって表わす．

Example 3.10. Example 3.6(1)(4) は単射でも全射でもない．(2)(6) は単射であるが全射ではない（全射とは限らない）．(3)(5) は全射であるが単射ではない．(7) は全単射である．

$A = \{0, 1\}, B = \{2, 3, 4\}$ とすると例えば $f(x) = x + 2$ や $g(x) = 4 - x$ によって定義される関数は単射である．しかし B から A への単射は存在しない．単射というのは簡単にいえば対応させる先がダブらない関数である．対応させる先がダブらないためには終領域に少なくとも始領域と同じだけの要素が含まれていなければならない．このことから A から B への単射が存在するということは Y に X と同じか，あるいはそれより多くの要素が含まれていることに等しいとを含意すると考えられる．この基準を集合の「サイズ」の大小関係を計るものとして利用することにしよう．

Definition 3.11 (集合のサイズの比較)**.** 任意の集合 A, B に対して A から B への単射が存在するとき，A **のサイズは** B **のサイズ以下である**といい，

$$A \hookrightarrow B$$

によって表わす．また $A \hookrightarrow B$ と $B \hookrightarrow A$ の両方が成り立っているとき A **と** B **は同等である**といい，

$$A \simeq B$$

によって表わす．

$\hookrightarrow$ と $\simeq$ について以下が成り立つ．

- $A \hookrightarrow A$
- $A \hookrightarrow B, B \hookrightarrow Z$ ならば $A \hookrightarrow Z$
- $A \simeq A$
- $A \simeq B$ ならば $B \simeq A$
- $A \simeq B, B \simeq Z$ ならば $A \simeq Z$
- $A \simeq B \iff A$ から B への全単射が存在する[*4]

[*4] この事実は，A から B への単射と B から A への単射が存在するならば A から B への全単射が存在するというカントール＝ベルンシュタインの定理による．

サイズの大小についてのこの基準は有限集合について考えている限りは何の問題もない．しかし無限集合について考えると，奇妙なことがある．偶数の集合を $2\mathbf{N}$ によって表わすことにしよう．$2\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{N}$ であるため，$\mathbf{N}$ には $2\mathbf{N}$ よりも多くの要素が含まれていると考えるのは自然である．その一方，$\mathbf{N}$ から $2\mathbf{N}$ へは例えば $f(x) = 2x$ によって定義される単射が存在する．従って $\mathbf{N} \hookrightarrow 2\mathbf{N}$ が成り立つ．

「全体はその部分より大きい」というのは古くから信じられてきた格率である．無限集合はこれに反する帰結をもたらすために，そこには何かしら矛盾的なことが含まれていると考える数学者もいた．しかしデデキントは逆にこの性質を積極的に利用して無限集合を特徴づけた．つまりある集合が無限集合であるのはその集合のある真部分集合に対して単射が存在するときである，と定義したのである．このような集合は現代ではデデキント無限集合と呼ばれている．

Definition 3.12 (デデキント無限)**.** 集合 A が**デデキント無限**であるのは，ある $M \subsetneq A$ に対して $A \hookrightarrow M$ が成り立つ時である．

明らかに A がデデキント無限であるということは，$f[A] \neq A$ が成り立つような単射 $f : A \to A$ が存在することと同値である．

3.2 デデキントの単純無限集合

以上の準備のもとに，デデキントがどのように自然数を特徴づけたかをみていこう．A は集合，$\phi : A \to A$ は単射であるとする．いま $a \notin \phi[A]$ を満たすような $a \in A$ が存在するとする．従って A はデデキント無限である．このとき $\phi(a) \notin \phi[\phi[A]]$ である．というのも任意の $a' \in \phi[A]$ に対して $a \neq a'$ だから，ϕ の単射性より $\phi(a') \neq \phi(a)$ である．よって $\phi(a) \notin \phi[\phi[A]]$ である．同様にして

$$\phi(\phi(a)) \notin \phi[\phi[\phi[A]]]$$
$$\phi(\phi(\phi(a))) \notin \phi[\phi[\phi[\phi[A]]]]$$

等々が言える．$\underbrace{\phi(\phi(\dots\phi}_{n}(a)\dots)$ を $\phi^n(a)$ と略記し，$\underbrace{\phi[\phi[\dots\phi}_{n}[A]\dots]$ を $\phi^n[A]$ と略記することにすると，任意の n に対して

$$\phi^n(a) \in \phi^n[A] \quad \text{かつ} \quad \phi^n(a) \notin \phi^{n+1}[A]$$

が成り立つ．ここから任意の n, m に対して $n \neq m$ ならば $\phi^n(a) \neq \phi^m(a)$ が成り立つ．従って A の異なる要素を無限に

$$a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$$

という仕方で並べていくことができる．

ここでデデキントは次の定義を導入する．

Definition 3.13 (単純無限集合)**.** A は集合 $\phi : A \to A$ は単射であり，$a \in A, a \notin \phi[A]$ とする．これらが

$$A = \bigcap \{X : a \in X, \phi[X] \subseteq X\} \tag{4}$$

を満たすとき，(A, ϕ, a) を**単純無限集合**と呼ぶ．

デデキントはこの定義の条件を「完全帰納法の原理」と呼んでいる[*5]．その理由は次の通りである．(A, a, ϕ)

[*5] 完全帰納法とはいわゆる数学的帰納法のことである．これに対して不完全帰納法とは日常的な推論における一般化，すなわち何匹かのカラスを観察してすべてのカラスは黒いと結論する類の推論のことである．

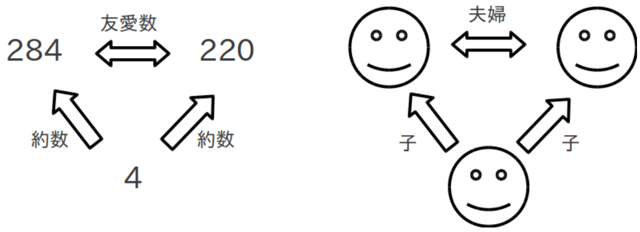

図 1　同型な構造

が単純無限集合であるとしよう．集合 X が a を含み，かつ任意の $x \in X$ について $\phi(x) \in X$ が成り立つとしよう．このとき $A \subseteq X$，すなわちすべての $a \in A$ について $a \in X$ が言える．これは数学的帰納法を行うときに私たちが行っていることである．すなわち (1)0 について条件 C が成り立つことを示し，(2) 任意の自然数 n について条件 C が成り立つなら $n+1$ にも C が成り立つことを示す．そのことによってすべての自然数について C が成り立つことを示すのである．

(A, ϕ, a) が単純無限集合であるということはより直観的に表現すれば，a に ϕ を繰り返し（有限回）適用することで A のどの要素にも到達できるということである（a 自身には ϕ を 0 回適用してたどりつける）．単純無限集合のもっとも明白な例は自然数と後続者関数と 0 の組み合わせ，(
$Natat, s, 0)$ である．しかし例えば $(2\mathbf{N}, ss, 0)$(偶数の集合と，後続者の後続者を与える関数と，0 の組み合わせ)，$(\mathbf{N} - \{0\}, s, 1)$ なども単純無限集合である．実際，単純無限集合はいくらでも考えることができる[*6]．しかしながら単純無限集合には次の重要な事実が成り立つ．

Theorem 3.14. 単純無限集合はすべて同型である．

ここでいう「同型」とは，構造が等しいということを意味している．二つの数学的な構造が等しいということを一般的に定義する方法はない（そもそも数学的構造の一般的な定義がない）のであるが，集合に基づいた順序構造，代数構造などについては十分に一般的な定義がある．単純無限集合は代数構造の一種であるため，代数構造の定義と，そこでの同型性の定義を紹介しよう．

3.3　集合論的な構造の捉え方

構造は対象の集まりとそれらの間の関係から構成されている．例えばジョンとメアリーの夫婦にはロバートという一人の子供がいるとしよう．またミシェルとクロエ夫妻にはピエールという一人の子供がいるとしよう．この二つの家族は同じ構造を持っていると言うのは自然である．その構造は，全部で三つの要素からなっていること，一つの要素が他の二つの要素に対して子供であるという関係を持つこと，さらにその要素以外の二つの要素は互いに対して夫婦という関係に立っていることによって特徴づけられる．一方でフランツとインゲ夫妻にはルードヴィヒとアドルフという二人の息子がいるとする．この家族は，前の二組の家族とは異なる構造を持っている．

しかしながら構造というのはさらに抽象的に捉えることができる．たとえば 220，282，4 という三つの自然数を考えよう．4 は他の二つに対して約数という関係を持っている．また 220 と 282 は互いに対して友愛

[*6] 例えば $(3\mathbf{N}, sss, 0), (4\mathbf{N}, ssss, 0), \ldots, (\mathbf{N} - \{0,1\}, s, 2), (\mathbf{N} - \{0,1,2\}, s, 3), \ldots$ など．

数[*7]の関係に立っている．この構造は，友愛数を夫婦に，約数を子供に置き換えると先ほどのジョンとメアリーとロバート（あるいはミシェルとクロエとピエール）の家族と同じ構造を持っていることが分かる（図 1 参照）．

このように数学的構造について考えるとき，私たちはその構造を構成している要素が具体的に何であるかだけではなく，その要素を結びつけている関係が何であるかということも捨象して考える．重要なのはある構造の中で a と b の間に R という関係がついているなら，別の構造において a と b に対応する対象の間に R に対応する関係がついているということだけである．

このような直観な理解を集合論の枠組みの中で定義していこう．

Definition 3.15 (関係構造)**.** 集合 A と A 上の関係 $R_1, R_2, \dots, R_n$ が与えられているとする．このとき A とこれらの関係を組み合わせた $(A, R_1, R_2, \dots, R_n)$ を A **上の関係構造**と呼ぶ．

関数 $\tau : \{1, 2, \dots, n\} \to \mathbf{N}$ が関係構造 $(A, R_1, R_2, \dots, R_n)$ の**パターン**であるのは，任意の $i (1 \leq i \leq n)$ に対して，R_i が A 上の $\tau(i)$ 項関数になっているときである．

Example 3.16. (1) 図 1 の左の構造は関係構造として記述すると

$$\begin{aligned} A &= \{248, 220, 4\} \\ R_1 &= \{(4, 248), (4, 220)\} \\ R_2 &= \{(248, 220), (220, 248)\} \end{aligned}$$

と定義される A, R_1, R_2 の組 (A, R_1, R_2) である．右の構造は

$$\begin{aligned} B &= \{\text{ ジョン}, \text{メアリー}, \text{ロバート }\} \\ S_1 &= \{(\text{ロバート}, \text{ジョン}), (\text{ロバート}, \text{メアリー})\} \\ S_2 &= \{(\text{ジョン}, \text{メアリー}), (\text{メアリー}, \text{ジョン})\} \end{aligned}$$

と定義される B, S_1, S_2 の組 (B, S_1, S_2) である．

(2) 任意の集合は関係を持たない関係構造と捉えることができる．すべての集合は同じパターンを有する．

(3) 集合 A 上の 2 項関係 R が任意の $a, b, c \in A$ に対して

(i) aRa

(ii) $aRb, bRc \Longrightarrow aRc$

(iii) $aRb, bRa \Longrightarrow a = b$

を満たすとき，R は**順序**と呼ばれる．A とその上の順序 R に対して (A, R) は関係構造である．このような関係構造を特に**順序構造**と呼ぶ．明らかにすべての順序構造は同じパターンを持つ．たとえば自然数の集合 $\mathbf{N}$ とその上の大小関係は $\leq$ は順序構造 $(\mathbf{N}, \leq_{\mathbf{N}})$ を構成する．

Definition 3.17 (関係構造の同型性)**.** 同じパターン $\tau : \{1, 2, \dots, n\} \to \mathbf{N}$ を持つ関係構造 $(A, R_1, R_2, \dots, R_n)$ と $(B, S_1, S_2, \dots, S_n)$ が**同型**であるのは，A から B への全単射 $f : A \to B$ が存

[*7] 二つの自然数が友愛数であるというのは，一方のそれ自身を除いた約数の和が他方の数に等しいときである．たとえば 284 と 220，1210 と 1184，2924 と 2620 などがある．

在して，任意の $i(1 \leq i \leq n)$ に対して

$$\forall a_1, a_2, \ldots, a_{\tau(i)}[(a_1, a_2, \ldots, a_{\tau(i)}) \in R_i \iff (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{\tau(i)})) \in S_i]$$

が成り立つ時である．このような $f : A \to B$ を $(A, R_1, R_2, \ldots, R_n)$ **から** $(B, S_1, S_2, \ldots, S_n)$ **への同型射**と呼ぶ.

Example 3.18. (1) 3.16(1) の二つの関係構造は同型である．実際,

$$f(248) = \text{ジョン}$$
$$f(220) = \text{メアリー}$$
$$f(4) = \text{ロバート}$$

と定義される関数 $f : A \to B$ はこの二つの構造の間の同型射になっている.

(2) 関係構造として捉えられた二つの集合が同型であるのは，単にそれらの間に全単射が存在する（すなわちそれらが同等である）場合である.

(3) 順序構造 (A, R) と (B, S) が同型なのは A から B への全単射 f が存在して，すべての $a, a' \in A$ に対して

$$aRa' \iff f(a)Sf(a')$$

が成り立つ時である.

(4) 自然数の集合 $\mathbf{N}$ と整数の集合 $\mathbf{Z}$ は同等であり，したがってこれらは関係構造として同型である．しかしそれぞれの集合の上の大小関係を考えた順序集合 $(\mathbf{N}, \leq_{\mathbf{N}})$ と $(\mathbf{Z}, \leq_{\mathbf{Z}})$ は同型ではない．というのも任意の全単射 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ を考えたとき，$f(0) - 1 \leq_{\mathbf{Z}} f(0), f(0) - 1 \neq f(0)$ である．一方，f は全単射なので，ある $x \in \mathbf{N}$ に対して $x \neq 0$ かつ $f(x) = f(0) - 1$．よって $f(x) \leq_{\mathbf{Z}} f(0)$ だが $x \not\leq_{\mathbf{N}} 0$．従って f は同型射ではない.

単純無限集合に話を戻そう．単純無限集合は (A, ϕ, a) という形をしていた．これは関係構造とは異なるものであるように思われる．というのも ϕ は A 上の関数であり，a は A の一つの要素だからである．しかし関数は関係の特殊なものであるし，a は $\{a\}$ だと思えば A^1 の部分集合なので，やはり関係の一種であると考えることもできる．だとすると二つの単純無限集合 (A, ϕ, a) と (B, ψ, b) の同型性は関係構造の同型性より派生する次の条件である： A から B への全単射 f が存在し,

1. 任意の $x, y \in A$ に対して $(x, y) \in \phi \iff (f(x), f(y)) \in \psi$,
2. 任意の $x \in A$ に対して $x \in \{a\} \iff f(x) \in \{b\}$

1 の条件は次のように言い換えることができる.

$$\text{任意の } x, y \in A \text{ に対して} \phi(x) = y \iff \psi(f(x)) = f(y).$$

$\Longrightarrow$ は

$$\text{任意の } x \in A \text{ に対して} \psi(f(x)) = f(\phi(y))$$

と同値であり，また $\Longleftarrow$ は

$$\text{任意の } x \in B \text{ に対して } f^{-1}(\psi(x)) = \phi(f^{-1}(x))$$

と同値である．従って 1 は

$$\text{任意の } x \in A \text{ に対して} \psi(f(x)) = f(\phi(y)) \text{ かつ任意の } x \in B \text{ に対して } f^{-1}(\psi(x)) = \phi(f^{-1}(x))$$

すなわち

$$\psi \circ f = f \circ \phi \text{ かつ } f^{-1} \circ \psi = \phi \circ f^{-1}$$

と同値である．この式は次の図式が可換であるということによって表現される[*8]．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[l, "f^{-1}"'] \arrow[d, "\psi"] \\ A & B \arrow[l, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

また 2 は

$$\text{任意の } x \in A \text{ に対して } f(a) = b$$

と同値である．

従って関係構造の同型性の定義より，二つの単純無限集合 (A, ϕ, a) と (B, ψ, b) が同型であるということは

- $\psi \circ f = f \circ \phi$
- $f^{-1} \circ \psi = \phi \circ f^{-1}$
- $f(a) = b$

を満たす全単射 f が存在するということに等しい．

任意の二つの単純無限集合の間に上のような全単射が存在することは容易に証明される．従って任意の二つの単純無限集合は同型であり，その構造を問題にする限りはそれらを区別する必要はない，ということが分かる．

3.4 デデキントの構造主義

デデキントは任意の単純無限集合 (A, ϕ, a) について，「これらの要素の持つ特殊な性格を完全に無視」して，ϕ によって「要素の間につけられる関係だけを考慮する」ならば，A の要素は「自然数または順序数または単に数」と呼ばれ，そして a がこの数系列の「基礎数」と呼ばれる，と述べ，そしてさらに

> 単純無限集合の定義の諸条件から導かれ，従ってすべての単純無限集合対して常に同一である関係と法則とが，数についての科学すなわち算術の第一の対象を形成する

という．

このように主張するとき，デデキントははっきりと構造主義にコミットしている．算術の主要な対象は個々の数ではなく，単純無限集合の定義から導かれる関係や法則である．そしてそれらの関係や法則はすべての単純無限集合に関して同一である．従って私たちはいかなる単純無限集合も自然数の系列とみなすことができる．特定の単純無限集合にしか成り立たないような事実（例えばツェルメロの順序数について成り立つがフォン＝ノイマンの順序数には成り立たない $3 \in 17$ のような事実）は算術には関係のない事実として無視することができる．

[*8] ある図式が可換であるというのは、その図式の中の一つの集合から別の集合へと至る矢印の経路によって示される関数の合成がすべて同一になるということである。

4 構造主義の哲学的基礎

ベナセラフの「数とは何でありえないか？」は特定の集合が自然数ではありえないことを，説得的な議論によって論証した．ここから自然数とは特定の一個の集合ではなく，特定の構造を備えた任意の集合である，あるいはむしろそれらによって共有される構造そのものである，という考えが生まれてきた．これが数学的構造主義である．

構造主義の基本的なテーゼは次の通りである．

- 数学的対象はある構造の中での関係によって特定・同定される．
- 数学の理論は個々の対象の内的な性質についてのものではなく，その理論によって「表現」される構造の中での関係についてのものである．
- ある理論から帰結する命題は，その理論を満たす任意のモデルに共通の構造について成り立つ事実を述べている．

この原則に従えば，私たちは個々の数学的対象について，その本質が何かというような問題を考えなくて良い．またどのモデルが正しいモデルかということが問題にならないため，ベナセラフのパズルは回避できる．

一方で構造主義は，数学的構造の存在とその本性について説明するという課題を，必然的に負うことになる．さらにまたそれは，数学的構造がいかにして認識されうるか，あるいは数学的構造はどのように言及されるかという，認識論的・意味論的問題に答えを与えるものでなければならない[*9]．この点に関しては，構造主義の中にも大きく分けて二つの立場がある．一つはシャピロ，レスニクらの「*sui generis* 構造主義」[*10]である．もう一つは，パットナムやヘルマンらの「消去主義的構造主義」[*11]である．

Sui genris 構造主義者は数学的構造を普遍的・抽象的な存在者として扱う[*12]．普遍的な構造は具体的な構造をトークンとするタイプであり，数や点などの数学的対象は構造の中の「場所」として実在性を持つ．*Sui generis* 構造主義によると，二階論理によって記述される「整合的」な理論は直ちに一つの普遍的構造を特定する．また数学的構造への指示は，その構造を特定する数学的言語によってなされる．

この立場に対して，Hellman [8] は次のように反論する：(i) 存在論的に強すぎる（ヘルマンは “hyperplatonism” と呼ぶ）．(ii) 構造について「パターン」であるとか，「普遍」であるという以上の説明がない．(iii) 構造と対象の関係が相互依存的である．

ここからヘルマンはシャピロやレスニクとは異なる構造主義，「様相的構造主義」を提案する．様相的構造主義では，ある理論の言明は，個別的な構造に対する言及を含まないものとして解釈され，また理論における公理は具体的なモデルを念頭に置かないものと考えられる．従って，様相的構造主義は，パーソンズの言う「消去主義的構造主義」の一種である．

4.1 消去主義的構造主義

パーソンズは，消去主義的構造主義を，「ある種の数学的対象についての言明を，あるタイプの構造についての一般的な言明と見なし，そしてこの考えに基いて，問題となっている種類の数学的対象への言及を消去す

[*9] Cf. Hellman [8].
[*10] この呼び方は Hellman [8] による．
[*11] この呼び方は Parsons [11] による．ヘルマン自身は彼の立場を「様相的構造主義」と呼んでいる．
[*12] 数学的構造の存在論的身分についてはシャピロとレスニクの立場は異なっている．しかしここではその点について論じない．

る方法を探すこと」として特徴付ける（[11], p. 307）．彼は，この試みの起源をデデキントの集合論に基づく自然数論に求める．パットナムは，デデキントのアイディアを，集合論ではなく論理学に基いて展開することを提案している．さらにヘルマンはパットナムの提案を様相二階述語論理に基づいて実際に遂行した．彼らの試みを簡単に振り返ってみよう．

4.1.1 デデキント

すでに見た通り，デデキントは，任意の単純無限集合 (A, ϕ, a) について，その要素の特殊な性質を無視し，ϕ によって規定された関係だけに注目するとき，これらの要素を「自然数」と呼ぶことが出来る，という（[5], par. 73.）．もちろん Ω を満たす (A, ϕ, a) は一意に定まらないので，複数の「自然数」が存在することになる．

Parsons [11] の解釈によれば，Dedekind は「自然数」という名前を，単純無限集合の要素の要素の名前としてではなく，むしろその関係一般の名前として使った．この解釈では，自然数について，ある性質 Γ が成り立つという主張は，

$$\forall(A, \phi, a)[\Omega(A, \phi, a) \to \Gamma(A, \phi, a)] \tag{5}$$

という主張の省略であるということになる．ここでは特定の集合や対象に対する言及はなされていない．この解釈によってパーソンズはデデキントを消去主義的構造主義の元祖に位置づける．

しかしデデキントは実際に Ω を満たす構造の例を挙げることが必要であると考え，「本来的自我」，「・・・についての思考」といったものに訴える奇妙な「証明」を展開する（[5], par. 66）．単純無限集合の条件を満たす構造の例を挙げる必要があると彼が考えた理由は，次のように推測することが出来る．上の (5) は全称量化のかかった含意文である．従ってもし前件を満たす対象（単純無限集合）が存在しなければ，どんな Γ に対しても (5) が空虚に成り立つ．従って彼は少なくとも一つ単純無限集合が存在することを示す必要があったのだろう．

デデキントは，単純無限集合の具体例を挙げるが必要であると考えていたという点で，純粋な消去主義者とは見なせない．それでは具体例に頼らず，かつ空虚な真理に陥ることがないことを保証する方法はあるのだろうか．

4.1.2 パットナム

パットナムはデデキントのアイディアを，集合に対する言及を含まない形で展開することを提案する．パットナムの意図は，集合論によって数学全体を捉える方法のオルタナティヴとして，論理学の枠組みで数学全体を捉えることである．またパットナムの提案の特徴として，デデキントにはなかった様相の概念を導入した点が挙げられる．

例えば定項 c と n 項述語 P を持つ公理系 AX において B が定理であるということは，任意の対象名 c^* と n 項関係記号 P^* に対して

$$\Box(AX[c^*/c, P^*/P] \to B[c^*/c, P^*/P]) \tag{6}$$

が成り立つことであると考えることが出来る[*13]．数学の言明をこのように解釈する立場を Putnam [12] は “if-thenism” と読んでいる．

(6) に関して重要なことは，含意文の外側に様相演算子 “$\Box$” が置かれていることである．これによって前件と後件の間の必然的な結びつきが主張されている．従って仮に前件が成り立たなくても，そのことですぐに式

[*13] $E[t_1/s_1, \ldots, t_n/s_n]$ は表現 E に現れる項 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ をそれぞれ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ で置き換えて得られる表現を表わす．

全体が真になるわけではない．というのも，クリプキ意味論をとるなら，(6) が意味するのは，$AX[c^*/c, P^*/P]$ が成立するあらゆる可能世界において $B[c^*/c, P^*/P]$ が成立する，ということだからである．

デデキントの立場はさしずめ “set-theoretic-material-if-thenism.” とでも呼ぶことが出来るだろう．これに対してパットナムの立場は “first-order-strict-if-thenism” と呼ばれうるものである．

4.1.3 ヘルマン

ヘルマンは，パットナムによって示唆された，数学を様相論理の枠組みで再構成するプロジェクトを追求し，「様相的構造主義」の立場を提唱する．

ヘルマンは二階論理を用いて，任意の数学的言明を，モデルへの全称量化，必然化のかかったものと解釈する．たとえば自然数について Γ という性質を主張する言明は

$$\Box\forall(A, \phi, a)[\Omega'(A, \phi, a) \to \Gamma(A, \phi, a)] \tag{7}$$

を意味するものと解釈される．

しかしヘルマンもデデキントと同様の問題に直面する（と少なくとも彼自身は考える）．厳密含意を使うことで，ヘルマンの方法は実質含意のパラドクスを避けることが出来る．しかしながらヘルマンの方法も厳密含意のパラドクスに苦しむことは避けられない．というのも，もし Ω' を満たす構造が存在することが不可能だとしたら，(7) はやはりいかなる Γ に対しても空虚に真だからである．

そこでヘルマンのとった解決策は，次の「定言的」公理を要請することだった．

$$\Diamond\exists(A, \phi, a)[\Omega'(A, \phi, a)] \tag{8}$$

この公理は「Ω' を満たす構造が存在することが可能である」ということを主張している．この公理を要請することによって，(7) が空虚に真であることがなくなる，とヘルマンは考える．

4.1.4 消去的構造主義の問題

消去的構造主義は，数学的言明を個別的な対象や構造について何かを述べるものとしてではなく，ある前提を満たす構造（とその中の対象）が何らかの性質を持つことを述べるものとして解釈する立場であった．しかし，ある理論の前提（公理）を満たす構造が存在しない場合には，その前提からは任意のことが言えることになる．そこでデデキントは自然数論に関して，その前提を満たす構造が存在することを証明しようとした．ヘルマンは自然数と同型の構造が存在することが可能であることを公理として要請した．デデキントの証明はとても証明として認められるものではない．ではヘルマンの定言的公理はどうだろう．

公理の妥当性を論じることはあまり意味がない．問題はその公理が生産的であるのかどうか，つまりその公理を受け入れることによって豊かな結果が得られるのかどうかである．公理 8 を受け入れることによって得られる積極的な結果は，ヘルマンによれば，自然数論がトリビアルに任意の結果を生むことを防ぐことである．しかしここでヘルマンは，数学において何かを主張するためには，フォーマルな証明が必要だという自明な事実を見落としている．つまりフォーマルな証明によらなければ，ペアノの公理系を満たすような構造が存在するか否かによらず，さらにはそのような構造が存在することが可能であるか否かによらず，何事も自然数について主張することは出来ないのである．

確かに様相二階論理においては $\neg\Diamond\exists X\Phi(X)$ から，任意の Q ついて $\Box\forall X(\Phi(X) \to Q)$ が帰結する．しかしこのことが即ち (8) の必要性につながるわけではない．なぜならば $\neg\Diamond\exists X\Phi(X)$ がフォーマルに証明されない限り，私たちはそれを証明に使うことは出来ないからである．従って $\neg\Diamond\exists(A, \phi, a)[\Omega'(A, \phi, a)]$ がフォー

マルに証明されない限り，私たちは自然数が空虚な真理を持つことを心配する必要はない．さらに言えばもしも $\neg\Diamond\exists(A,\phi,a)[\Omega'(A,\phi,a)]$ が何らかの仕方でフォーマルに証明されたならば，逆にこれと (8) から任意の帰結が導出されることになる．従っていずれにしても (8) を要請する意味はないのである．

(8) を要請しなければならないように思われるのは，おそらく次の二つが前提されているからである．

- 二階の量化のドメインがすべての数学的構造を含んでいる．
- "$\Box$" が意味論的な論理的妥当性を意味する[*14]．

これらは果たして受け入れられる前提だろうか？ 前者の想定は明らかに強すぎるが，これが前提されていないと，意味論的な論理的妥当性によって必然性の意味を説明することが出来なくなる．

しかし既に述べたように，公理からある主張が帰結するためには，フォーマルな証明が必要なことのすべてである．例えば自然数論において "$\forall x\exists y(x \leq y)$" を主張するのに，自然数の公理を満たす数学的構造のすべてを参照する必要はない．それどころかいかなる数学的構造を参照する必要もない．ただ公理から証明すればよいのである．この自明な事実が，数学の哲学ではしばしば無視されている．その理由の一つはおそらく，タルスキの形式意味論の影響であろう．

タルスキ的意味論は論理的帰結関係 $\Gamma \models A$ の意味を，前提 Γ のすべてが成り立つときには結論 A も成り立つことと説明する．タルスキの意味論はフォーマルな意味論としては有用である．しかしそれを数学の言語についてのインフォーマルな解釈にまで拡張するのは誤りである[*15]．

4.2 直観主義的 if-thenism

ラインヴァルトは意味論的含意と構文論的含意を区別し，数学における if-then は後者でなければならないと論じる．これに対してパーソンズは「論理的妥当性」を意味論的に解釈するか，構文論的に解釈するかは，if-thenism や消去主義的構造主義には無関係であると述べる（Parsons [11], p. 341, n. 26 and Rheinwald [14]）．しかしパットナムとヘルマンがモデルの存在の可能性を要求したのはまさに，if-then を意味論的帰結関係として捉えていたからに他ならない．だとすれば if-thenism の次のステップは「構文論的 if-thenism」，「形式的演繹主義」あるいは「直観主義的 if-thenism」ではないだろうか？

直観主義的に解釈された if-then に対しては「空虚な真理」のパラドクスは当てはまらない．というのも，直観主義的には，$\Gamma \rightarrow A$ が主張できるのは，Γ の任意の証明 γ を A の証明 $f(a)$ に変換する手続き $f : \Gamma \rightarrow A$ を持っているときである．もし Γ が公理 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の連言だとすれば $\Gamma \rightarrow A$ の証明は $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$ から A の証明を構成する手続き，すなわち公理系 Γ での A の証明に他ならない．従って Γ を充足する構造が存在しないからといって，直ちに任意の A が Γ から帰結するということにはならない．Γ から帰結するのは，Γ から形式的に導出できる式のみである．

直観主義的に if-then を捉えるということは，それを形式的な導出の関係として捉えるということである．パットナムがこの解釈をとろうとしなかった理由が，次の言葉の中に見出せる．

> 証明が単なる紙や砂の上の印 mark の列以上のものであることは**確かである**．もしも記号が言語の中で意味を持っていなかったら，人間が話さず，数学を行わず，証明を追わず，等々だったとしたら，同じ印の列は証明には**ならない**だろう．（Putnam [13], p. 8.）

[*14] Cf. Putnam [12], p. 49 and Hellman [7], p. 37.

[*15] このことの困難は Benacerraf [2] によって指摘されている．

ここでパットナムはある記号列が証明であるための，二つの基準を提示している．一つは，記号列を構成する個々の記号に意味が与えられているということ，もう一つは，人間の実践的な活動の中で記号が使用されているということである．これはもっともに思われる．例えば，猿がでたらめにキーボードを打って作った文字列が何の証明にもなっていないことは確かである．しかし，それらが証明として認められないのは，その文字列を構成する文字に意味が与えられていないからでも，猿が人間ではないからでもなく，その文字列が決められた規則に従って構成されたものでないからである．例えば私たちは，適切にプログラムされた定理証明機によって構成された記号列を証明として認めている．その際に記号に意味が与えられているかどうかは重要ではない．例えば a を公理として持ち，$X \to XX$ を推論規則として持つような形式的体系の証明を構成するプログラムを書くことは容易である．このプログラムに従って，コンピュータが $a \quad aa \quad aaaa$ という文字列を生み出したならば，この文字列はこの形式的体系における定理 $aaaa$ の証明として認められる．

もちろんパットナムが証明と呼んでいるものは，このような形式的体系の証明のことではなく，数学における通常の証明のことだろう．しかし直観主義者は数学における通常の証明と，このようなテクニカルな意味での形式的証明との間に本質的な区別を立てない．だからといって直観主義的 if-thenist が，記号や証明の意味について何も言うことがないわけではない．直観主義的 if-thenism の立場から，形式的な記号列は十分に「意味」を持っている，ということが出来る．しかしその場合の「意味」は「指示対象」や「真理値」ではない．次節では，直観主義的 if-thenism が記号の意味をどのように説明するかを見ていこう．

5　非モデル論的意味論

本節では，形式的体系の記号の意味について，従来のモデル論的意味論とは異なる説明を与えることを試みる．

5.1　モデル論的意味論

数学の哲学の最も重要な課題の一つは，数学的言明に対する解釈の方法（意味論）を提案することである．この課題はさらに，数学における固有名の意味を決定するという課題と，数学的真理とは何かを説明するという課題に分割される（とはいえこの二つの課題は完全に分離されるものではなく，互いに密接に結びついている）．

これらがなぜ数学の哲学の課題になるのかを考えよう．数学的言明は，事実（経験的な事実）がどうなっているかに関わらず，アプリオリな論証のみによって正当化される．数学において何かを主張する際に，私たちは具体的な対象に対する認知的なアクセスを一切持たずにそれを行っている．ここから数学においては，ある理論（の言明）がどの対象について言及しているのかが確定しないという問題が生じる．

例えば，ペアノ算術を考えよう．ペアノ算術の公理系の記号が自然数を意味しているということは出来る．しかし自然数は何なのかと問われれば，私たちは答えに窮するだろう．私たちはこれこそが自然数であると断言できる特定の対象を持っていないのである．確かに，ペアノの公理系を満たす数学的対象を構成することはできる．例えばツェルメロやフォン・ノイマンなどはそれぞれ集合論に基づいて異なる自然数のモデルを与えている．これらはいずれもペアノの公理系を充足している．しかし，それゆえに，これらのうちのどれか一つを真のモデルとする理由は，ペアノ算術の内部あるいは数学の内部には存在しないのである．それではペアノの理論は実際のところは何について何を語っているのだろうか．ベナセラフが提起したのはまさにこの問題で

言語	モデル
$sss0$，$sssss0$	自然数 3，自然数 5
$sss0 + sssss0$	自然数 3 と自然数 5 の和
$sssss0 + sss0$	自然数 5 と自然数 3 の和
$=$	同一性
$sss0 + sssss0 = sssss0 + sss0$	3 と 5 の和と，5 と 3 の和が等しいという事態，真

$$
\begin{tikzcd}
\text{“}sss0 + sssss0\text{”} \arrow[dr, "\text{denotes}"'] & & \text{“}sssss0 + sss0\text{”} \arrow[dl, "\text{denotes}"] \\
& 8 &
\end{tikzcd}
$$

図 2　モデル理論的な「意味」の解釈

あった[*16].

これがパズルのように思われる背景には，「有意味な表現は特定の対象や事態を意味する」という素朴な意味論的信念がある．この信念は，例えば以下のような原則によって定式化される．

- 名前はある対象を意味する．
- 述語はある性質，あるいは関係を意味する．
- 文 $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ は $a_1, a_2, \ldots, a_n$ によって意味される諸対象の間に，P という述語によって意味される関係が成り立っているという事態を意味し，そしてその事態の成立の有無に従って真または偽の真理値を持つ．
- 文 $\forall xP$ は，任意の名前 a に対して文 $P[a/x]$ によって表わされる事態が成立しているという事態を意味する．

そしてこれらは確かに述語論理の表現を解釈する標準的な方法である．本稿ではこのような解釈を「モデル理論的解釈」あるいは「モデル理論的意味論」と呼ぶことにする．

モデル理論的解釈の特徴が最も顕著に出るのは，同一性言明の解釈においてである．同一性言明は，二つの名前が同一の対象を意味しているということを主張する言明として解釈される．例えば “$sss0 + sssss0 = sssss0 + sss0$” というペアノ算術の文は，項 “$sss0 + sssss0$” の意味する数と項 “$sssss0 + sss0$” の意味する数が同一の数である，ということを述べているものと解釈される．

5.2　言語の指令的意味

フレーゲは語の意味を，Sinn と Bedeutung に分け，Bedeutung は指示対象，Sinn は指示対象の与えられ方である，と説明する．例えば $1 + 1$ と $3 - 1$ は同一の Bedeutung を持つが，その Sinn は異なっている．前

[*16] Cf. Benacerraf [3].

$$\begin{tikzcd} \text{“}sss0+sssss0\text{”} \arrow[dr, "\text{reduces to}"'] & & \text{“}sssss0+sss0\text{”} \arrow[dl, "\text{reduces to}"] \\ & \text{“}ssssssss0\text{”} & \end{tikzcd}$$

図 3　操作的な「意味」の解釈

者は 1 に 1 を加えることで得られる数として 2 を指示するが，後者は 3 から 1 を引くことによって得られる数として 2 を指示している．簡単に言えば Sinn とは，その指示対象を特定するための方法を私たちに示すもの，と考えることが出来るだろう．この点で，フレーゲは言葉の記述的側面のみならず，指令的（prescriptive）側面も意識していた．

自然言語において，言葉な指令的側面は記述的側面よりも基本的で，原始的なものである．例えば動物の用いる信号は多くが指令的である[*17]．記述的側面は指令的側面から，ある種の「抽象化」によって生まれる．

数学や論理学の意味論においては，通常，記号の指令的側面は重視されていない．しかし実際，数学においても記号の指令的意味は重要である．Mac Lane [9] は「数学自身は実在ではなく，法則を扱っているのである」（p. 579）とさえ言う．

$3+5$，$2*4$，$24/3$，2^3，8 などはすべて自然数論の式である．一方で $3+5$，$2*4$，$24/3$，2^3 が 8 を「意味する」と述べることは自然に思われる．これは 8 がそれ以上簡単な式に還元できないのに対して，他の式はそうではないという事実に由来する．

ここで $3+5$ などの式は，+ に関わる計算の規則とともに理解されなければならない．その計算の規則とともに $3+5$ は 8 を意味しうる．さらには 8 自体もそこに適用できる計算の規則がないということから，それ自身を意味として持つということが言える．

ここで「意味する」ということは，言語的対象（項，式，表現）が何か言語外の対象を指示するということではない．意味するものも，意味されるものも言語内の対象である．これをモデル理論的解釈と比較してみよう．例えば “$sss0+sssss0 = sssss0+sss0$” というペアノ算術の文は，モデル理論的解釈では項 “$sss0+sssss0$” と項 “$sssss0+sss0$” は同一の数，すなわち 8 を指示すると考えられる（図 2 を参照）．一方，ここで提案する解釈では，これらの項はともに “$ssssssss0$” という項に還元されるがゆえに，“$ssssssss0$” を意味する，と考えられるのである．

このような意味論は「操作的意味論 operational semantics」と呼ばれる．操作的意味論はプログラミング言語の意味論として発展したものであり，特に記号の計算や抽象的還元体系（abstract reduction systems）に対する意味論として適している．この意味論では，与えられた式はある種の「命令」として解釈され，決まった規則に従って与えられた式を変換して得られた値がその式の意味になる．

ここでは言語の外の対象に対する言及は必要なく，言語の中でどのような計算過程が生じ，その結果として何が得られるということだけが問題になる．

次の Weyl の言葉はそのことをよく示している．

> 私たちはここで数学的抽象の決定的な一歩に至る：私たちは記号が何を表わしているかについて忘れるのである．...［数学者］は必ずしもサボっているのではない．というのも，これらの記号が表わす物に目を向ける必要なしに，これらの記号によって実行できる操作がたくさんあるからである．（Abelson

*17 Cf. Millikan [10].

and Sussman [1], p. 79 に引用.）

ラムダ計算の形式的体系が作られてから，その数学的モデルが発見されるまでに 30 年以上の時間がかかっている．ではそのモデルが発見されるまで，ラムダ項は「無意味」なものとして扱われていたのだろうか？ もちろんそうではない．ラムダ項は β 変換などの操作を行うように命じるプログラムとして意味を持っている．またラムダ項によって自然数上の計算を表現することも可能なのである．

5.3 記号体系の持つ構造

このような意味論を採用した場合，数学的構造はどのように捉えられるのだろう？ 大雑把に言えば，数学的構造とは，対象の集まりとその上の関係や演算によって規定される．形式的体系は項や式と，その間の関係を規定している．従って形式的体系そのものが，その体系の表現する数学的構造（モデル）の一つである*18．形式的体系は，必ずしもモデルによって意味を補完されなければならないものではない．

Halbach and Horsten [6] は，特に自然数について，「意図されるモデルは，記号体系と，その上のペアノ算術を満たす帰納的な演算である」と提案する．彼らがこう提案する根拠は「ペアノ算術の任意のモデル $\mathbf{M} = \langle M, <, +, \times \rangle$ に対して，$<$，$+$，$\times$ が帰納的であれば，$\mathbf{M}$ は標準的モデルである」というテネンバウムの定理である．ある対象の集合に対して「帰納的」な関係や演算が定義されるためには，それらの対象がそれ自体として（外的な関係に先立って），互いに区別がつく内的特徴を備えたものでなければならない，と彼らは主張する．というのも帰納的であるということは，「チャーチのテーゼ」によれば実効的に計算が出来るということに等しい．もし互いに識別できる対象を扱うことが出来なければ，いかなる計算のアルゴリズムも作れないだろう．そのために彼らはモデルの対象領域を「記号体系」とする．ただしその記号は，そもそも何か別のものを意味する記号である必要はない．

ハルバッハとホーステンは自然数の構造は「それぞれの記号体系から，特殊性を抽象することで得られる」（[6], p. 184）と結論する．パーソンズもまた数学の基礎的な分野は “quasi-concrete objects”*19を扱っており，それらは純粋に構造主義的に捉えられるものではなく，それら自体として内的な特徴を持つと考える*20．

様相的構造主義の困難は，ある理論に対して，そのモデルとなる数学的構造の存在の可能性を要請しなければならないところにある．しかしハルバッハらによれば，少なくとも自然数論に関しては，帰納的に規定される記号体系そのものがモデルとして役立つ．従って自然数論に関してはヘルマンの定言的公理 (8) を要請しなくても良い．

記号体系の構造は，個々の記号（列）の持つ形式によって決定される．個々の記号（列）は，その形式によって定まる意味を持つ．しかしそれは指示対象や真理値としての意味ではなく，「操作的」意味である．

同じような結論が数学のどこまで拡張できるかは，構成主義的な仕方でどこまでの数学がカバーできるかによる．特に実数などの構造は記号体系として捉えることが困難である．なぜなら連続体濃度を持つ記号体系というものは考えにくいからである．しかしここで提案しているのは数学的言語に現れる項や式，言明の一つの解釈方法である．従って記号化されうる以外の部分についてはここでは考慮されていない．

*18 Cf. 任意の論理から生成されるリンデンバウム代数．あるいはより自明には論理式そのものを値とする無限多値論理.

*19 意味としてそのトークンを持つ記号タイプをパーソンズはこう呼んでいる

*20 Cf. Parsons [11], section 8.

6 おわりに

本講義では，「数学的対象とは何か」という問に対するフレーゲに代表されるアプローチが抱える困難を振り返り，そして数学的構造主義がそれをどのように解決しようとしたかを概観した．そしてまた，そのようなアプローチがモデル論的な意味論を前提しているために，別の困難に突き当たることを見た．この問題の解決には「操作的」な意味論が有効であると思われるが，しかしそれについての詳しい研究はまた別の機会に譲ることにしたい．

参考文献

[1] H. Abelson and G. J. Sussman. *Structure and Interpretation of Computer Programs*. The MIT Press, Massachusetts, second edition, 1996.

[2] P. Benacerraf. Mathematical truth. In P. Benacerraf and H. Putnam, editors, *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, pages 403–420. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1983.

[3] P. Benacerraf. What numbers could not be. In P. Benacerraf and H. Putnam, editors, *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, pages 272–294. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1983.

[4] G. Cantor. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. In *Gesammelte Abhandlungen: mathematischen und philosophischen Inhalts*, pages 282–356. Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1962.

[5] R. Dedekind. Was sind und was sollen die Zahlen? In R. Fricke, E. Noether, and Ö. Ore, editors, *Gesammelte Mathematische Werke, Zweiter und Dritter Band*, pages 335–391. Chelsea Publishing Company, New York, 1962.

[6] V. Halbach and L. Horsten. Computational structuralism. *Philosophia Mathematica (III)*, 13(2):174–186, 2005.

[7] G. Hellman. *Mathematics without Numbers*. Oxford University Press, Oxford, 1989.

[8] G. Hellman. Structuralism. In S. Shapiro, editor, *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, pages 536–562. Oxford University Press, Oxford, 2005.

[9] S. Mac Lane. **『数学——その形式と機能』**. 森北出版株式会社, 1992. 彌永昌吉監修，赤尾和男・岡本周一訳．原著は Mac Lane, *Mathematics, Form and Function*. Springer-Verlag, New York, 1986.

[10] R. G. Millikan. *Varieties of Meaning: The 2002 Jean Nicod Lectures*. The MIT Press, Cambridge, 2004.（邦訳：『意味と目的の世界』，信原幸弘訳，勁草書房，2007 年）.

[11] C. Parsons. The structuralist view of mathematical objects. *Synthese*, 84:303–346, 1990.

[12] H. Putnam. Mathematics without foundations. In *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers, volume 1*, pages 43–59. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1979.

[13] H. Putnam. Truth and necessity in mathematics. In *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers, volume 1*, pages 1–11. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1979.

[14] R. Rheinwald. *Der Formalismus und seine Grenzen*. Konigstein/Ts., Hain, 1984.