

# 数学の哲学

## 1. イントロダクション

久木田水生  
minao.kukita@gmail.com

京都大学

関西学院大学 2011 年度

- 「無限ホテル」には客室が1号室, 2号室, 3号室, ...と無限にある. あるときここに無限に多くの客が来て, ホテルが満室になった. そこに予約のない客が一人やってきて宿泊させて欲しいと言った. ホテルの支配人は機転を利かせてその客を泊めることが出来た. さてどうしたのだろう.

- 1 号室の客には 2 号室に, 2 号室の客には 3 号室に, ... というように移動してもらうと 1 号室が空く.

- またもや満室状態の無限ホテルに、今度は新たに無限にたくさんの客がやってきた．今度もホテルの支配人は機転を利かせてその客たちを泊めることが出来た．さてどうしたのだろうか．

- 1号室の客には2号室に, 2号室の客には4号室に, 3号室の客には6号室に, ...というように移動してもらうと奇数番号の客室が空く.

- 無限ホテルには自然数全体と同数の客室がある．この数を  $\aleph_0$  (アレフゼロ) と呼ぶ．
- 上の問題は  $\aleph_0$  に 1 を加えても  $\aleph_0$  に等しいし,  $\aleph_0$  を 2 倍しても  $\aleph_0$  に等しいことを表している．すなわち,

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 * 2 = \aleph_0$$

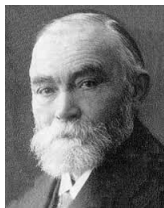


Georg Cantor

- 数とは一般に何らかの対象の集まりに帰属させられる性質と考えられる．
- 例：ビートルズのメンバーの数 = 4．太陽系の惑星の数 = 8．
- 自然数全体も，自然数という対象の集まりだから，そこには何らかの数が帰属させられる筈．
- しかし自然数は無限に存在するので，どの自然数によって表される数よりも大きい数を持つ．
- 19 世紀末のドイツの数学者カントールはこの数を  $\aleph_0$  と呼んだ．

- カントールは数がある集まりの要素の個数として定義した．
- そのために彼は「対象の集まり」についての数学的理論 = 集合論を作った．
- カントールは彼の作った集合論が，自然数の理論の基礎を提供する強力な理論であることを示した．
- 数学の全体は自然数論の上に構築できることが示されていたため，結局集合論が数学全体の基礎になることが期待された．





Gottlob Frege

- カントールと同時期，ドイツの論理学者フレーゲは集合の概念を用いず，純粋な論理学によって数論を基礎づけることを試みていた．
- 彼はそのために新しい記号論理の体系（概念記法）を構築し，そしてそれが自然数論を導出するのに十分な体系であることを証明した．



Bertrand Russell

- しかしカントールの集合論およびフレーゲの論理体系からはパラドクスが導かれることをイギリスの論理学者ラッセルが示した．
- ラッセルのパラドクスは「自分自身を要素として含まない集合すべてからなる集合  $R$ 」を想定することで導かれる．

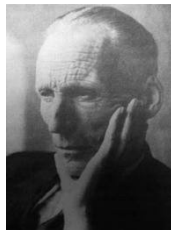
# ラッセルのパラドクスの類似物

- ある村の床屋が「私は、この村の住人で自分で髭を剃らない大人の男すべての髭を剃っている」と言った．床屋自身の髭は誰が剃るのだろう？
- 図書目録にはその目録自体が掲載されているものもあれば、されていないものもある．いま自分自身を掲載していない図書目録すべてを掲載した目録を作ろうと考えたとする．その目録にそれ自身を掲載すべきだろうか？
- 形容詞には自分自身に当てはまるものとそうでないものがある．たとえば「日本語の」とか「四文字の」などは自分自身に当てはまる．このような形容詞を自己形容的な形容詞と呼ぼう．一方自分自身に当てはまらないものを非自己形容的な形容詞と呼ぼう．では「非自己形容的な」という形容詞は自己形容的か非自己形容的か？

# 数学の危機と数学の基礎付け



David Hilbert



L. E. J. Brouwer

- ラッセルのパラドクスは数学全体の基礎と見られた集合論が矛盾を含むものであることを示した。
- ここからカントールの集合論に代わる基礎を求める運動がおこった。
- その中にはヒルベルトの有限主義，ブラウワーの直観主義，ラッセルの論理主義などが含まれる。

- ヒルベルトが目指したのは、数学の理論を形式的な記号体系として形式化し、その体系が無矛盾な理論になっていることを、その体系よりも「弱い」理論によって示すことだった。
- このように数学の理論を形式化することによって対象化し、その体系の性質を研究する方法をヒルベルトは「メタ数学」と呼んだ。



Kurt Gödel

- しかしヒルベルトの試みは不可能であることが示された。
- 1930年代にゲーデルが、自然数論を含む無矛盾な体系は、自身の無矛盾性を示すことが出来ない、ということを証明したのである。



Alfred Tarski



Alonzo Church



Alan Turing

- このような形式的体系の限界は、同じ頃、他の分野でも発見された。特に有名なのはタルスキによって発見された真理の定義不可能性、チューリングやチャーチによって発見された計算の停止問題の決定不可能性である。

- 数学の歴史における数学の基礎付け，数学の危機，数学の限界といった問題すべて，数学に固有の無限や循環の概念を取り扱う方法に関係している．
- そこで本講義では上記のような歴史的経緯を概観すると同時に，無限や循環の概念の数学に取り扱い，そこにまつわる問題点などを論じる．



- minao.kukita@gmail.com
- [http://www.geocities.jp/minao\\_kukita/](http://www.geocities.jp/minao_kukita/)