

数学の哲学

9. 数学的真理とは何か？

久木田水生
minao.kukita@gmail.com

京都大学

関西学院大学 2011 年度

“VERITA EST ADAEQUATIO INTELLECTUS ET REI”
(真理とは知性と事物との合致である)



Thomas Aquinas

- 真理とは、**命題**や**認識**に帰属するもの、それらの持つ性質である。
- ここではもっぱら命題について考える。
- 最も素朴な直観において、ある命題が真であるのは、**その命題が表す事態が実際に成立しているとき**である。
- このような真理についての説明を対応説 *correspondence theory* という。

- 対応説は日常的な多くの事例を説明することができる．
- 例えば「地球は丸い」という命題が真であるのは，この命題によって表されている事態，すなわち地球が丸いという事態が実際に成立しているときである，と考えることは自然である．

命題

現実

「地球は丸い」 \iff



- より詳しく言えば「地球が丸い」が真であるのは、「地球」によって表される対象が「丸い」によって表される性質を持つときである．
- また「地球は太陽より大きい」が真であるのは、「地球」によって表される対象が「太陽」によって表される対象に対して「より小さい」によって表される関係を持つときである．
- 論理学の用語では「地球」、「太陽」などの対象を表す語を項、「丸い」、「より大きい」などの性質や関係を表す語を述語という．

- 典型的な対応説では、項や述語や文などの文法的単位のそれぞれに指示対象を割り当て、それをその表現の意味とする。
- このような意味論を指示的意味論と呼ぶ。
- 一般的な指示的意味論では次のように表現の意味が与えられる。

項	→	対象
述語	→	集合
文	→	真理値

- 指示的意味論においては文を構成する要素（項と述語）が指示する対象，性質，関係に文の真偽を還元する．
- 「地球は丸く，かつ地球は太陽より小さい」や「すべての惑星は丸い」のような結合子や量化子を含む命題の真偽は，それを含まない部分命題の真偽に依存して決定される．
- このような，複合的な表現の意味はその構成要素の意味から決定されるという想定を合成原理という．

- 「地球は丸く、かつ地球は太陽より小さい」が真
 \iff 「地球は丸い」と「地球は太陽より小さい」がともに真
- 「すべての惑星は丸い」が真
 \iff 任意の x について「 x は惑星である」が真ならば
 「 x は丸い」が真

タルスキ意味論



Alfred Tarski

- 合成原理に基づき，集合論の道具立てを使った指示的意味論を創始したのはポーランドの数学者アルフレッド・タルスキである．
- このタルスキ意味論は現代でも論理学の最も標準的な意味論になっている．

- 複合的な文の真偽はそれを構成する部分式の真偽に依存する．
- 単純な文（結合子や量化子を含まない文）の真偽はその文を構成する項と指示される諸対象が述語によって指示される関係に立っているかどうか依存する．
- 通常そのような文の真偽は私たちがその**諸対象を直接認識すること**によって検証される．

- しかしこのような真理観にはいくつかの問題がある．
- 以下のような文を考えてみよう：
 - 「すべての人間は死ぬ」
 - 「光より早く移動するものはない」
 - 「0 は自然数である」
 - 「高齢者とは 65 歳以上の人のことである」
- これらに対応する事実とは何だろう？
- またこれらに対応する事実があるとして，それを検証するためには何をすればよいのだろう．
- 科学や数学に用いられる言明の多くは対応説によっては説明できない．

整合説

- そこで提案されたのが真理についての整合説 *coherence theory* である．
- 整合説では命題の真偽は事実との対応ではなく，特定の信念体系や理論を表す命題の集まりの中で，他の諸命題のとの整合性に依存する，とされる．
- クワインは，ある命題の真偽はそれ自体で決定されるのではなく，同じ理論体系に属する命題全体によって決定されるという，ホリズムの考えを提唱した．



W. V. O. Quine

- 真理を**相対化**する .
- 個々の言明が**何について**のものなのかという問題を扱えない .

プラグマティズム

- 真理についてのもう一つの主要な立場はジェームズやパースなどによって提唱されたプラグマティズム *pragmatism* である。
- プラグマティズムにおいては、ある命題の真偽は**行動に対する有用性**によって測られる。
- つまりその命題を信じて行動した結果が有益であるならばその命題は真であり、有害であるならばその命題は偽である、ということである。



W. James



C. S. Peirce

プラグマティズムの問題

- 有用性の基準を同定するのが困難．
- 有用性が問われないような命題もありうる．

- 真理についての一つの理論で，私たちが言語を用いるあらゆる場面での命題の真偽を説明することは困難．
- 真理は多様である．

- 一般に数学的命題の検証は証明によって行われる．
- 定理が真理であることを保証するのは，その証明に使われる推論が論理的演繹であり，かつ証明の出発点となる公理が確実に真であるからである．
- ではその公理の真理は何によるのか？

公理についての二つの考え

- 公理は数学的対象について，証明の必要がない自明な性質を述べている．
 - 「 x が自然数であれば $x + 1$ も自然数である。」
 - 「任意の x に対して $x \notin \emptyset$ 。」
- 公理は特定の数学的構造を定義するのみであり，真理を持たない．
 - 「 (G, \cdot, u) がモノイドであれば $\forall x, y, z \in G [x(yz) = (xy)z]$ 。」

二種類の公理

- 例えば任意の自然数 x について, $x + 1$ が自然数であるということは自然数についての自明の真理に思われる.
- このような公理を Feferman は基礎的公理, Hellman は主張的公理と呼ぶ.
- 一方でモノイドの公理は, モノイドについての自明な真理を述べているわけではない.
- これこれの公理を満たすものを「モノイド」と呼ぶ, と決めているにすぎない.
- このような公理をフェファマンは構造的公理, ヘルマンは定義的公理と呼ぶ.
- 構造的 / 定義的公理から証明される定理はいかなる真理をもつのだろうか?

遂行的言語行為

- 私たちが用いる言明の中には真理を持たない，あるいはその真理を問うことがほとんど意味をなさないものがある．
- たとえば遂行的言語行為で用いられる言明がそうである．
- 遂行的言語行為とは，その言明の発話自体によってその言明が真になるものである．
 - 「この場所に無断で駐車したものには罰金を課す」
 - 「1 と自分自身以外で割り切れない数を素数と呼ぶ」
 - 「この子を『太郎』と名付ける」
- これらの言明は例えば「地球は丸い」という言明とは全く性質の異なるものである．

遂行的言語行為

- 規則を定める，定義する，命名するなどの言語行為は，言明によって表現されている事態を**共同体の中での決まり事として成立させる**ものである．
- その制度的事実は，その言明の発話自体によって成立するのであり，あらかじめそのような事実があったわけではない．
- 「この子を『太郎』と名付ける」という言明の真理は，まさにこの言明を発話したという事実によって真である．
- **構造的 / 定義的公理は遂行的に使われている言明であり，主張的に使われている言明ではない．**

不確定的言明

- 「この場所に無断で駐車したものには罰金を課す」という言明は**特定の対象に言及しているわけではない**。
- またこれは**何らかの集まりに対する量化を含んでいるわけでもない**。
- この言明は**不確定の対象に言及している**のである。
- この事実はこの言明が真であることを妨げない。
- 遂行的言明はしばしばこのように不確定の対象に言及する。
- 私たちは、そこで言及されている対象が何であることを知らなくとも、あるいはそのような対象がたとえ存在しなくとも、その言明が真であることを知ることができる。

- 数学における構造的 / 定義的公理もまた不確定の対象に言及する言明である .
- それは一定の条件を満たす **任意の構造** によって構成されるカテゴリーを定義している .
- 定理はそのようなカテゴリーに属する任意の対象が満たす性質を述べている .

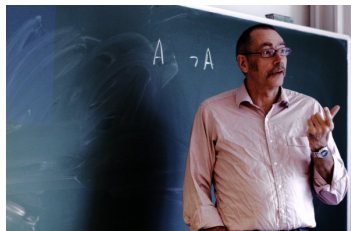
タルスキ意味論の限界

- タルスキ意味論は文の意味を，その構成要素の指示から合成的に決定するものだった．
- しかしタルスキ意味論では不確定的な対象への言及を含む言明の意味を決定することはできない．
- したがってタルスキ意味論の枠組みで数学における構造的 / 定義的公理の意味を説明することは困難である．

- 公理が特定の対象について成り立つ真理を述べていないのだとすると、数学の定理もまた特定の対象についての真理を述べているわけではない、ということになる。
- 数学の定理が述べているのは、あくまでも「これこれの公理が真だとすれば、これこれのことが真だ」ということに過ぎない。
- ラッセルは『数学の原理』において、数学的真理はこのような**仮言的なもの**だと主張している。
- このような立場は **if-thenism** と呼ばれる。

フィクショナルリズム

- If-thenism は，数学理論を一種の**フィクション**とみなす立場にも繋がる．
- たとえばグレアム・プリーストは，数学における公理を立てるという活動を，フィクションの創作と同様の活動とみなしている．
- 定理の導出は，フィクションについて私たちが推測をめぐらすことと平行なものだと考えられる．



Graham Priest

- 一方でこれらの立場では**数学的認識のステータス**を説明することが困難になる．
- 数学的言明があくまでも仮言的なもの，あるいはフィクションであるならば，**数学的認識とは何なのか？**
- 「2は素数である」という知識は本当に「ホームズは探偵である」という知識と同じようなステータスしか持たないのか？

- この問題について考えるためには、私たちの数学的言明を用いる実践について考えなければならないだろう。
- 特に構造的 / 定義的公理がどのように使用され、どのような役割を持つのかを考えなければならない。