様相論理入門

久木田水生 *

Morality mod Science セミナー 第 4 回
2017 年 10 月 19 日

1　序

1.1　論理学とは何か

論理学は正しい推論についての学である．推論とはいくつかの前提から一つの結論を導き出すことである．例えば次は前提を二つもつ推論である．

(1.1)	前提 1	太郎は次郎の兄だ．
	前提 2	次郎は三郎の兄だ．
	結論	太郎は三郎の兄だ．

推論の前提や結論になるものを**命題**と呼ぶ．命題については，それが**真**か**偽**のどちらかであるということが重要な性質である．この性質を命題の**真理値**と呼ぶ．

前提 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ から結論 B への推論が正しいのは，前提 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ がすべて真であるときには常に結論 B も真であるときである．言い換えると，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ のすべてが真であり，かつ B が偽であることがあり得ないならば前提 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ から結論 B への推論は正しい．

論理学は正しい推論のパターンを研究する．つまり前提や結論にくる命題がどのような形式であるときにその推論が正しいのかに関心を持つ．そのため論理学では「太郎は次郎の兄だ」のような具体的な命題は扱わない．論理学では例えば次のような推論を扱う．

(1.2)	前提 1	A ならば B
	前提 2	B ではない
	結論	A ではない

1.2　論理学で扱う命題の種類

上の例では「A ならば B」という命題の例が出てきた．

この「…ならば…」のように，いくつかの命題（大抵は一つか二つ）と結び付いて，より複合的な命題を作る表現を，論理学では**結合子**と呼ぶ．論理学において標準的に使われる結合子は「…ならば…」，「…でない」，「…かつ…」，「…または…」である．これらを使って作られた命題をそれぞれ**条件文**，**否定**，**連言**，**選言**とい

* minao.kukita@gmail.com

う．論理学において結合子は記号によって表わされる．標準的には以下の記号がつかわれる．

- A でない：$\neg A$
- A かつ B：$A \wedge B$
- A または B：$A \vee B$
- A ならば B：$A \to B$

なお「A ならば B」における A と B はそれぞれ，この条件文の**前件**および**後件**と呼ばれる．

これらの中でも条件文は論理学において特別な重要性を持っている．というのも上述のように論理学は正しい推論を特徴づけることを目的として持ち，そして条件文「A ならば B」が真であるということは一般に A から B への推論が正しいということを意味するからである[*1]．従って条件文をどのように特徴づけるかという問題は，どのような推論を正しいものとして受け入れるかという問題に直結するのである．

その一方で条件文の意味を説明することには，他の種類の文にはない困難がある．比較のために連言の意味がどのように説明されるかを考えよう．例えば「ドクはマーティの手紙を読んでおり，かつドクは防弾チョッキを着ていた」という文を考える．この文は端的に事実を報告したものであり，ここでの「かつ」の役割は，「ドクはマーティの手紙を読んでいた」と「ドクは防弾チョッキを着ていた」の両方が正しいということを表現することである．文の意味を真理条件としてとらえるならば，「A かつ B」という文の意味は，A と B の両方が真であることである（A と B の真理条件はすでに理解されているものとする）．一方で「ドクがマーティの手紙を読んでいなかったらドクは暴漢の襲撃によって命を落としていただろう」という文は，いわゆる反事実的条件文であり，この世界の事実を端的に描写したものではない．このような文が真である（あるいは偽である）というのはどのように説明されるべきなのだろうか．これらは前件と後件の真偽に還元されるのだろうか，もしそうだとすればそれはどのようにしてだろうか．以下ではこのことを考えたい．

1.3 推論の種類

論理学とは正しい推論を特徴づけることを目的とする．推論とは通常いくつか前提から一つの結論を導き出すことである．ある推論が正しいということは，その前提のすべてが成り立つ時には結論も成り立つということと理解される．

推論の中にはいくつかの種類がある．まずすべての推論は**必然的推論**と**蓋然的推論**に分けられる．ある推論が必然的であるというのは，前提のすべてが成り立っている時には必ず結論も成り立つということである．一方，ある推論が蓋然的であるというのは前提のすべてが成り立つときには高い確率で結論が成り立つということである．ただしどの程度の確率であれば高いと言えるのかは状況に依存し，また多分に主観的なものである．ここでは蓋然的推論は単に必然的推論ではないという意味で使うことにする．

例えば次の推論は必然的である．

(1.3)　前提　A は B の親である．
　　　　結論　B は A の子である

一方，次の推論は蓋然的である．

[*1] ただし例外も存在する．

(1.4) 前提 1　X は Z の父親である．
前提 2　Y は Z の母親である．
結論　X と Y は夫婦である．

ある推論が必然的であるかどうかは，その推論の前提がすべて成り立つが，結論は成り立たないような状況がありうるかどうかによって判定できる．そのような状況をその推論に対する**反例**という．例えば上の例では X と Y が結婚せずに Z を産んだ，あるいは結婚していたが Z を産んでから離婚したというような状況が考えられる．このような状況では前提は成り立つが結論は成り立たない．

必然的推論の中には**論理的**な推論とそうでないものがある．上にあげた必然的推論は「親」と「子」という特定の言葉の意味に依存している．従ってこれらの語を他の語に置き換えたときにはこの推論の必然性は失われる．一方で次のような推論を考えよう．

(1.5) 前提 1　すべての哺乳類は授乳する．
前提 2　鯨は哺乳類だ．
結論　鯨は授乳する．

この推論の正しさは「哺乳類」，「授乳する」，「鯨」などの言葉の意味には依存していない．従ってこれらの言葉を他の（文法的に適切な）語に置き換えてもこの推論は必然性は失われない．このようにそこに現れる言葉の意味に依存しない必然的推論を論理的推論と呼ぶ．論理的推論は**妥当な推論**あるいは**演繹（的推論）**とも呼ばれる．

蓋然的な推論の中にもいくつかの種類がある．個別的な事例から一般法則を推測する**帰納**，観察された現象に対して，それを説明する理由を推測する**アブダクション**，ある対象（のクラス）について成り立つことを別の対象（のクラス）についても成り立つと推測する**類推**などである．例えば以下のような推論がこれらの例にあたる．

(1.6) 前提 1　ジャンはフランス人でありかつジャンはワインが好きだ．
前提 2　ピエールはフランス人でありかつピエールはワインが好きだ．
前提 3　ギュスターヴはフランス人でありかつギュスターヴはワインが好きだ．
結論　フランス人はワインが好きだ．

(1.7) 前提 1　太郎がドーピングをすれば素晴らしい記録を出せる．
前提 2　太郎は素晴らしい記録を出した．
結論　太郎はドーピングをした．

(1.8) 前提　ネズミにとってダイオキシンは猛毒だ．
結論　人間にとってダイオキシンは猛毒だ．

この講義においては，特に断りがなければ推論といえば妥当な推論を意味するものとする．

Exercise 1.1. 以下の推論を妥当な推論，必然的だが妥当ではない推論，蓋然的推論に分類しなさい．また蓋然的であればその反例をあげなさい．

1. 太郎は次郎よりも背が高く，次郎は三郎よりも背が高い．したがって太郎は三郎よりも背が高い．
2. 太郎は花子の兄である．よって花子は太郎の妹である．

3. ジョンとピーターは同じ国籍を持つ．ピーターとディヴィッドは同じ国籍を持つ．ゆえにジョンとディヴィッドは同じ国籍を持つ．
4. 車を運転するには免許が必要だ．自転車も車の一種である．よって自転車を運転するには免許が必要だ．
5. 学生はすべて文化系のクラブか運動系のクラブに属している．太郎は文化系のクラブに属している．従って太郎は運動系のクラブには属していない．

1.4 妥当な推論の特徴づけ

論理学においては妥当な推論を特徴づけるのには，大きく言って二つの方法がある．その一方は**証明論**によるものであり，もう一方は**意味論**によるものである．証明論とはいくつかの形式的な規則を定めておいて，その規則を適用することによって導出することのできる推論が正しい推論であるとする方法である．一方で意味論においては，文の意味が数学的な方法によって定義され，それによって決定される真偽の概念に基づいて妥当な推論が特徴づけられる．このテキストにおいては主に意味論に基づく妥当性の概念を取り扱うが，ところどころで証明論についても言及する．

なお論理学はその対象とする文の種類によって**命題論理**，**述語論理**，**様相論理**などに分類されるが，ここで扱うのは主に命題論理である．命題論理は文の内部の構造（主語－述語構造など）には立ち入らず，もっぱら上述した結合子の振る舞いだけを対象とする．命題論理における妥当な推論には例えば

(1.9)
$$\frac{\text{前提}\quad \text{A または B ならば C}}{\text{結論}\quad \text{C でないならば A でないか B でないかのどちらかである}}$$

といったものがある．ここでは A と B は任意の文である．

述語論理は文を述語と項（名詞句のような働きをする表現）に分析し，「すべての P は Q である」，「P であるような Q が存在する」などの表現を扱う．ここでの P と Q は文ではなく述語である．述語論理における妥当な推論には例えば

(1.10)
$$\frac{\text{前提}\quad \text{すべての P は Q である}}{\text{結論}\quad \text{Q でない P は存在しない}}$$

といったものがある．

様相論理は必然性や可能性の概念を扱い，「必ず A」，「B ということがありうる」といった表現を扱う．様相論理における妥当な推論には例えば

(1.11)
$$\frac{\text{前提}\quad \text{必ずしも A という訳ではない．}}{\text{結論}\quad \text{A でないということがありうる．}}$$

といったものがある．

1.5 構文論

以下において私たちは主に記号化された形式言語を扱う．形式言語を定義するための規則を**構文論**という．ここでは命題論理の構文論を提示する．

命題論理が扱う対象は文と結合子である．以下では形式的に定義された文のことを**論理式**または単に**式**と呼ぶ．論理式は以下の二つの規則によって定義される．

1. $p, q, r, p_1, q_1, r_1, \ldots$ は論理式である．これらは**原子式**と呼ばれる
2. A, B が論理式であるとき，$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ は論理式である．これらはそれぞれ**否定**，**連言**，**選言**，**条件文**と呼ばれる．またこれらをまとめて**複合式**と呼ぶこともある．
3. 上記の二つの規則によって論理式であると定まるものだけが論理式である．

すべての式からなる集合を **Form** によって表わすことにする．また特に原子式の集合を **Atom** によって表わす．

この定義によって $(\neg p_3 \wedge r), (r_2 \to (q_5 \vee \neg\neg p))$ などは論理式であると分かる．一方で $p\neg, (q\wedge), (q_1 \to r$ などは論理式ではない．

括弧は論理式の構造を曖昧さのない形で提示するために付けられるものである．例えば $p \wedge q \vee r$ と書いてしまうと $(p \wedge (q \vee r))$ と $((p \wedge q) \vee r)$ のどちらなのかが分からなくなってしまう．しかし一番外側の括弧は書かなくても誤解されることはないので，以下では論理式の一番外側の括弧は通常省略して書くことにする．また算数において $x + y \times z$ と書いた時には $x + (y \times z)$ と読むように，私たちは $\wedge, \vee, \to$ の順番で優先的に結合するものと考える．従って例えば $p \to q \wedge r \vee p$ は $(p \to ((q \wedge r) \vee p))$ の省略である．また同じ結合子同士では右側にあるものが優先的に結合される．従って例えば $p \to q \to r$ は $(p \to (q \to r))$ の略である．

Exercise 1.2. 以下の論理式において省略されている括弧を復元しなさい．

1. $\neg p \to q \wedge r \to q$
2. $\neg q \vee r \vee p \to \neg q \wedge r \vee p$
3. $p \wedge q \to r \vee \neg q \to p \vee r \wedge q \wedge r$

Exercise 1.3. 以下の論理式の括弧を可能な限り省略しなさい．

1. $(((p \vee q) \to r) \to ((p \to r) \wedge (q \to r)))$
2. $((\neg p \to q) \to ((\neg p \to \neg q) \to p))$
3. $(((p \to q) \to p) \to p)$
4. $(\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q))$
5. $((p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q)))$
6. $((p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$

2 古典命題論理

この節では古典命題論理について説明する．

2.1 古典命題論理の意味論

$p, q_1, q_5 \to r_2$ などの式はこれだけでは何の意味もないただの記号である．私たちはこれらの記号を解釈する方法を与える．その際に古典論理では二つの重要な単純化を行う．それは「すべての文は真か偽のどちらかである」という原理を採用することである．これは**二値原理**と呼ばれている．以下，文の真偽のことをその文

の**真理値**と呼ぶ．私たちは真偽の真理値をそれぞれ 1 と 0 によって表わす．もう一つは，文に関してその真理値以外のことを一切考慮しないということである．これを文に関する**外延主義**と呼ぶ．

私たちの言語において意味を持つ対象は論理式のみである．

Definition 2.1 (解釈)**.** すべての式から真理値への関数 f が以下の条件を満たすとき，f は**古典的解釈**と呼ばれる：任意の式 A, B に対して

1. $f(\neg A) = 1 \iff f(A) = 0$
2. $f(A \wedge B) = 1 \iff f(A) = 1$ かつ $f(B) = 1$
3. $f(A \vee B) = 1 \iff f(A) = 1$ または $f(B) = 1$
4. $f(A \to B) = 1 \iff f(A) = 0$ または $f(B) = 1$

本節では古典的解釈を単に解釈と呼ぶことにする．$v, v', \ldots$ によって解釈を表わすことにする．任意の原子式の集合 S に対して v_S は S に属する原子式に 1 を与え，それ以外のすべての原子式に 0 を与える解釈であるとする．例えば $v_{\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}}$ は $P_1, P_2, \ldots, P_n$ に 1 を与え，それ以外に偽を与える解釈である．任意の解釈 v と任意の原子式 P に対して，$v[P]$ は原子式 P に 1 を与え，それ以外の原子式には v と同じ値を与える解釈であるとする．同様に $v[\neg P]$ は原子式 P に 0 を与え，それ以外の原子式には v と同じ値を与える解釈であるとする．

Exercise 2.2. 解釈は原子式への値の割り当てによって一意的に決定されることを示せ．すなわち任意の原子式 P に対して $v(P) = v'(P)$ を満たす解釈 v, v' は互いに等しいことを示せ．

Definition 2.3 (論理的帰結，トートロジー)**.** $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ は式であるとする．任意の解釈 v に対して $v(A_1) = v(A_2) = \cdots = v(A_n) = 1$ であるならば $v(B) = 1$ であるとき，B は $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の**論理的帰結**であるといい，

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

と書く．

また任意の解釈 v に対して $v(B) = 1$ であるとき，B を**トートロジー**といい，

$$\models B$$

と書く．

また任意の解釈 v に対して $v(A) = v(B)$ であるとき，A と B は**論理的に同値**であるといい，

$$A \simeq B$$

と書く．

Example 2.4. 以下が成り立つ．ただし以下において Γ, Δ は任意の論理式の列（空列も含む）を表わすものとする．また $\Longrightarrow$ は左辺が右辺の十分条件になっていることを，$\iff$ は左辺と右辺が互いに必要十分条件になっていることを表わす．

1. $\Gamma, A, B, \Delta \models C \Longrightarrow \Gamma, B, A, \Delta \models C$
2. $\Gamma \models A \Longrightarrow \Gamma, B \models A$
3. $\Gamma, A, A \models B \Longrightarrow \Gamma, A \models B$

4. 二重否定律：$\models \neg\neg A \to A$
5. 背理法：$A \to B, A \to \neg B \models \neg A$
6. $A, B \models A \land B$
7. $A_1 \land A_2 \models A_i \ (i = 1, 2)$
8. $A_i \models A_1 \lor A_2 \ (i = 1, 2)$
9. ジレンマ，両刀論法：$A \lor B, A \to C, B \to C \models C$
10. 演繹定理：$A \models B \iff \models A \to B$
11. モードゥス・ポネンス：$A \to B, A \models B$
12. 同一律：$A \models A$
13. 排中律：$\models A \lor \neg A$
14. 矛盾律：$\models \neg(A \land \neg A)$
15. $\models A \to (B \to A)$
16. 爆発原理：$\models \neg A \to (A \to B)$
17. ゲーデルの法則：$\models (A \to B) \lor (B \to A)$
18. $\models (A \to B) \lor (B \to C)$
19. パースの法則：$\models ((A \to B) \to A) \to A$

Exercise 2.5. 例 2.4 が成り立つことを確かめなさい．

2.2 実質含意のパラドクス

前節において私たちは古典論理の意味論によって結合子の意味がどのように定められるかを見た．特に古典論理において定義される条件文は**実質含意** *material implication* と呼ばれている．実質含意の性質は，それがどのような論理的帰結の関係を満たすかによって決定される．私たちは例 2.4 において，実質含意が満たす様々な性質を見た．そしてそれらは成り立つのが自然な性質に思われる．例えば 2.4 の 11 の意味を考えてみよう．これは A ならば B と，A から，B が帰結するということを述べている．これは最も基本的な推論規則の一つであり，条件文が当然従うべき規則である．

しかしながら実質含意には，必ずしも自然とは言えないような性質もある．例えば例 2.4 の 15 を考えよう．これが述べているのはある文が真であれば，その文を後件に持つ任意の文が真であるということである．従って例えば「日本の首都が東京ならば，このコインを投げて表が出れば日本の首都は東京だ」が真であることになる．そして実際に「日本の首都は東京だ」は真であるから，モードゥス・ポネンスより「このコインを投げて表が出れば日本の首都は東京だ」は真である．しかしこれを真であるとみなすのは不自然に思われる．

この問題と表裏をなすのが例 2.4 の 16 である．これが述べているのはある文の否定が真であれば（従ってその文が偽であれば），その文を前件とする任意の条件文が真だということである．例えば「村上春樹はノーベル文学賞を受賞していない」は真なので，「村上春樹がノーベル文学賞を受賞していれば，阿部寛はアカデミー賞を受賞する」は真である．同様に例 2.4 の 17-19 にも不自然なところがある．これらが**実質含意のパラドクス**と呼ばれるものである．

こういった不自然さの原因は主として，古典論理が文の内容を一切無視してその真理値のみに注目しているという点（外延性原理），および古典論理においては文は真か偽のどちらか一方（そして一方だけ）の真理値をとるという点（二値原理）にある．複合的な表現の意味が，その構成部分の意味によって決定されるという

ことは古典論理に限らず一般に受け入れられている．これを**合成原理**と呼ぶ．古典論理の条件文（実質含意）の不自然さは，外延性原理と二値原理，そして合成原理からの必然的帰結である．この点を説明しよう．

まず条件文の意味とはその真理値である（外延性原理）．そしてその真理値は真か偽のいずれかでなければならない（二値原理）．文の意味はその部分の意味から決定される（合成原理）だから，条件文 $A \to B$ の意味（真理値）はその構成部分である A と B の意味から決定されなければならない．A と B の意味もまたその真理値に他ならないのだから，結局，条件文の意味を決定する際に，私たちがやらなければならないことは，A と B の真理値の組み合わせのそれぞれに対して $A \to B$ の真理値を決定すること，つまり以下の表の空欄 (1)-(4) を真か偽の値で埋めることである．

A	B	$A \to B$
真	真	(1)
真	偽	(2)
偽	真	(3)
偽	偽	(4)

ではどのようにこれらの空欄を埋めていったらよいか．まず最も確実なのは A が真で B が偽の時には $A \to B$ が真になることはないということである．たとえばある教員に「テストで 60 点以上とれたら単位を与える」といわれ，実際にテストで 60 点以上とったのに単位がもらえなかったら，私たちはその教官を嘘つきだとみなす．従って (2) には偽が入らなければならない．また (1)(4) もそれほど問題はないように思われる．もしあなたがテストで 60 点以上とって，そして実際に単位がもらえたら，あなたはその教官の言ったことが本当だったと考えるだろう．またあなたがテストで 60 点以上取れなくて単位がもらえなくても，教官の言ったことが本当だったと考えるはずである．従って (1)(4) には真を入れるのが適当に思われる．難しいのは (3) である．あなたは 60 点以上取れなかった，しかし教官はあなたに単位を与えた．この場合，教官の言ったことは虚偽になるのだろうか．そのように捉えられる可能性もある．別な例を考えよう．あなたは咳が出るので病院に行ったとしよう．医者はあなたに「この薬を飲めば咳は止まります」と告げた．あなたはうっかりその薬を飲むのを忘れたが，しかし咳はすぐに収まった．この場合，医者の言ったことは嘘になるだろうか？ そうではないだろう．医者はその薬を呑むことが咳がすぐ止まることの十分条件であるといっただけで，必要条件であると言ったわけではない．

日常言語では必要十分条件の意味で条件文が使われることもある．たとえば「20 歳未満の喫煙は禁じられている」と言われた場合には，20 歳以上だったら喫煙は禁じられていないものと考えるのが普通だろう．このような場合においては前件が後件の必要十分条件になっているということが意図されている．日常言語においてこのような使い方があるということが条件文についての理解を難しくしている．しかしここではあくまでも十分条件として条件文の意味を理解しよう．すると (3) には真が入らなければならない．というのも (3) を偽にすると，条件文は必要十分条件を表わすことになってしまうからである．

条件文を必要十分条件として定義せず，十分条件として定義する理由はいくつかある．第一に，必要十分条件は十分条件（および連言）から自明な仕方で定義することができる．というのも A が B の必要十分条件であるということは，A が B の十分条件であり，かつ B が A の十分条件であるということに等しいので，必要十分条件を表わす結合子を $\equiv$ で表わすことにすれば，$A \equiv B$ は $(A \to B) \wedge (B \to A)$ によって定義することができるからである．逆に $\equiv$ から $\to$ を定義することはそれほど自明ではない．第二に，伝統的に論理学においては条件文は必要十分条件ではなく十分条件を表わすものとして使われることの方が多い．たとえば A ならば B と B から A を推論することは**後件肯定の誤謬**といわれ，また A ならば B と A の否定から B の否定

を推論することは**前件否定の誤謬**と呼ばれ，ともに伝統的に論理的誤謬の代表とされてきた．しかしながらもしも「ならば」を必要十分条件として理解するなら，これらは誤謬ではなく正しい推論ということになる．

現代論理学の創始者の一人であるラッセルは，実質含意の役割について次のように説明している．ラッセルは数学の命題は基本的に前件と後件に同じ変数が現れる条件文の形式をとる，と述べる．そしてそのような条件文を**形式含意** *formal implication* と呼ぶ．形式含意が真であるのはその変数にいかなる値を代入した結果も真である時である，と定義される．そのような数学的命題の例としては「x が 4 の倍数であれば x は 2 の倍数である」というような命題が挙げられる．これは前件と後件に x という共通の変数がある条件文なので形式含意である．これが真になるのは x にいかなる値を代入したときも，その結果として得られる命題が真である時である．例えば x に 8 を代入したとき，私たち「8 が 4 の倍数であれば 8 は 2 の倍数である」という命題を得る．x に 5 を代入したときは「5 が 4 の倍数であれば 5 は 2 の倍数である」という命題を得る．これらはラッセルによればすべて真なる命題でなければならない．そうでなければもとの形式含意が真でなくなってしまうからである．これらが真であるためにには，変数を含まない条件文の真理値は，前件が偽の時は後件の真偽に関わらず真，後件が真の時は前件の真偽に関わらず真となっていなければならないのである．つまりラッセルにとっては形式含意が本質的であり，実質含意はその真偽を与えるために導入される，操作的な概念に過ぎない．実際のところ，私たちが条件文を使う場合の多くは，何かしら不確定な要素を含んでいる．そしてその不確定な要素のいかなる実例によって確定されても，前件が真になる場合には後件が真になるということが条件文で意味されていることであろう．

実質含意の定義にはこのような理由があるのではあるが，しかしその理由を聞かされたからといって，その不自然さが払拭されるわけではない．条件文の定義は二値原理と外延性の原理の帰結であるならば，それらの原理を採用しない，別な条件文の説明をあるのではないか．

このような実質含意の違和を解決するために，考えられたのが**厳密含意**であり，そして厳密含意を表現するために使われるのが様相論理である．

3　様相論理

前節でみたように古典論理は二値原理と外延性原理という二つの原理に従っている．このために古典論理における条件文——実質含意——は，私たちの直観に反する奇妙な性質を持つことになった．その奇妙な性質とは，前件と後件の内容的な繋がりを無視して，それらの真偽のみを考慮したことによって生じている．例えば「このコインが表がでたら日本の首都は東京だ」は古典論理では真なる条件文として通用してしまう．

この条件文が真であるということは「日本の首都は東京だ」という文が事実として真であるということ（そしてそのことだけ）に依存している．しかしながら一般に条件文が表明しているのは，事実としての前件や後件の真偽に関する何かではなく，前件が成り立つときには**必ず**（**常に**）後件が成り立つ，という前件と後件の**必然的な繋がり**であると考えられる．

この前件と後件の必然的な繋がりという観点を反映するために考案されたのが，**厳密含意** *strict implication* と呼ばれる条件文である．本節では厳密含意がどのように定義され，そしてどのような性質を持つのかを見る．

3.1　必然様相と可能様相

実質含意に欠けているのは，前件と後件の必然的なつながりである．その特徴をとらえるためには私たちは必然性の概念を表現できるような論理体系を作らなければならない．そのためにはこれまでの命題論理の記号体系では不十分である．そこで私たちはこれまでの言語に「……は必然的である」という表現を加えて拡張する．これは任意の命題 A に対して $\Box A$ と表わされる．具体的には論理式の定義は次のように修正される．

1. $p, q, r, p_1, q_1, r_1, \ldots$ は論理式である．これらは**原子式**と呼ばれる
2. A, B が論理式であるとき，$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), \Box A$ は論理式である．これらはそれぞれ**否定**，**連言**，**選言**，**条件文**，**必然様相文**と呼ばれる．またこれらをまとめて**複合式**と呼ぶこともある．
3. 上記の二つの規則によって論理式であると定まるものだけが論理式である．

$\Box A$ は「A ということが必然的である」を意味することを意図されている．したがって $\neg\Box\neg A$ は「A でないということが必然的ではない」という意味であり，「A であることが可能である」を意味すると考えることができる．私たちはこれを $\Diamond A$ と略記する．以後は $\mathbf{Form}_\Box$ によってこのように定義された論理式の集合を表わすことにする．

必然性はどのようなものであるかについて，また必然性がどのような性質を満たすべきかについては様々な考え方がある．例えばあることが必然的であればそれは現実に成り立っていると考えるのは自然だろう．一方で必然性は必ずしも現実性を含意しないという考え方もある．またあることが必然であるなら，そのことが必然であることも必然であるという考え方もある．ここではそのような必然性の捉え方の違いについて詳しくは論じない．私たちは定式化が比較的容易な必然性だけを考えることにする．

3.2　様相論理の意味論

あることが必然であるというのはどういうことか．一つの捉え方は，考えうるあらゆる状況においてそれが成り立つ，ということである．状況とは様々な事態の成立と不成立の組み合わせである．例えば現実においては空は青く，ボブ・ディランはミュージシャンであるが，そうでないことも考えられる．例えば可能な一つの状況においては空は赤くて，ボブ・ディランは画家かもしれない．私たちが考慮している個別的な事態が空が青いかどうかとボブ・ディランがミュージシャンであるかどうかの二つであるとすれば，可能な状況は全部で四通りある．

状況 (1)	空は青い	ボブ・ディランはミュージシャンである
状況 (2)	空は青い	ボブ・ディランはミュージシャンではない
状況 (3)	空は青くない	ボブ・ディランはミュージシャンである
状況 (4)	空は青くない	ボブ・ディランはミュージシャンではない

私たちの道具立てでは，考慮するべき事態の一つ一つはそれぞれ一つの原子式の真偽によって表現される．従って一つの可能な状況とは，原子式それぞれの真偽の組み合わせである．つまり，可能な状況とは前節で定義した一つの解釈に類比的なものである．ただしここでは解釈される式の中に様相文が加わっている点が異なっている．

ここで様相論理の意味論の形式的な定義を与えよう．

Definition 3.1 (構造). W は空でない集合，$@ \in W$ とする．W の要素は**可能世界**と呼ばれ，特に $@$ は**現実世界**と呼ばれる．各 $w \in W$ に対して $v_w : \mathbf{Form}_\Box \to \{0,1\}$ は次の条件を満たす関数であるとする：すべての論理式 A, B に対して，

1. $v_w(\neg A) = 1 \iff v_w(A) = 0$
2. $v_w(A \wedge B) = 1 \iff v_w(A) = 1$ かつ $v_w(B) = 1$
3. $v_w(A \vee B) = 1 \iff v_w(A) = 1$ または $v_w(B) = 1$
4. $v_w(A \to B) = 1 \iff v_w(A) = 0$ または $v_w(B) = 1$
5. $v_w(\Box A) = 1 \iff$ すべての $w' \in W$ に対して, $v_{w'}(A) = 1$
6. $v_w(\diamond A) = 1 \iff$ ある $w' \in W$ に対して, $v_{w'}(A) = 1$

$v = \{v_w : w \in W\}$ とする．このとき $(W, @, v)$ を（様相論理の）**構造**と呼ぶ．

$S = (W, @, v)$ は構造とする．$w \in W$ に対して $v_w(A) = 1$ であるとき，A は構造 S の可能世界 w **において真である**と言われ，

$$S, w \models A \quad \text{または} \quad w \models_S A$$

と書かれる．問題にしている構造が明らかである時には単に $w \models A$ と書く場合もある．

Definition 3.2 (式の評価，論理的帰結). 様相論理の式は何らかの構造において評価される．式 A が構造 $S = (W, @, v)$ **において真である**のは $S, @ \models A$ が成り立つときである．このとき

$$S \models A \quad \text{または} \quad \models_S A$$

と書く．式 $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ が，任意の構造 S に対して

$$\models_S A_i \text{がすべての } A_i (1 \leq i \leq n) \text{ に対して成り立つならば } \models_S B$$

を満たす時，B は $A_1, A_2, \ldots, A_n$ からの**論理的帰結**であるといわれ，

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

と書かれる．

Theorem 3.3 (様相論理における定理). 任意の論理式 A, B に対して以下が成り立つ．

1. *A が古典命題論理のトートロジーならば $\models A$.*
2. *$\models A$ ならば $\models \Box A$*
3. $\Box(A \to B) \models \Box A \to \Box B$
4. $\Box(A \wedge B) \models \Box A \wedge \Box B$
5. $\diamond(A \vee B) \models \diamond A \vee \diamond B$
6. $\neg \Box A \models \diamond \neg A$
7. $\neg \diamond A \models \Box \neg A$
8. $\Box(A \vee B) \models \Box A \vee \diamond B$
9. $\diamond A \wedge \Box B \models \diamond(A \wedge B)$
10. $\Box A \models A$
11. $\Box A \models \diamond A$

12. $A \models \Box \Diamond A$
13. $\Box A \models \Box\Box A$
14. $\Diamond A \models \Box \Diamond A$

Proof このうちのいくつかを証明しよう．

2 について．対偶を証明する．$\not\models \Box A$ としよう．このときある構造 $S = (W, @, v)$ に対して $S \not\models \Box A$．従って $S, @ \not\models \Box A$．すなわちある $w \in W$ が存在して，$S, w \not\models A$．ここで構造 S' を (W, w, v) として定義しよう．つまり S' は現実世界が @ から w に変わった以外は S と等しい構造である．この構造において明らかに $S', w \not\models A$．従って $S' \not\models A$．従って $\not\models A$．

3 について．$S = (W, @, v)$ は任意の構造とする．$S \models \Box(A \to B)$ かつ $S \models \Box A$ とする．このとき任意の $w \in W$ に対して $w \models A \to B$ かつ $w \models A$．従って $w \models B$．よって任意の $w \in W$ に対して $w \models B$．よって $S \models \Box B$．よって $S \models \Box A \to \Box B$．

残りは練習問題とする． $\Box$

Exercise 3.4. 定理 3.3 の残りを証明しなさい．

3.3 厳密含意

私たちが実質含意に関して見出した困難のもとは，それが前件と後件の間の必然的な繋がりを捉えることができていないということである．そこで私たちは以上で導入した必然性の概念を用いて，新しい含意関係を「A ならば B ということが必然的である」を意味するものとして定義する．これを**厳密含意**と呼ぶ．「必然的である」は「A ならば B」の全体を修飾していることに注意しよう．形式的には厳密含意は $\Box(A \to B)$ として定義される．$A \to \Box B$ ではない．以後，厳密含意を $A \Rightarrow B$ によって表わす．

Theorem 3.5 (厳密含意の性質)**.** 厳密含意は任意の式 A, B, C に対して以下を満たす．

1. $\models \Box A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $\models \neg \Diamond A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
3. $A \models B \iff \models A \Rightarrow B$
4. $\models A \Rightarrow A$
5. $A \Rightarrow B, A \models B$
6. $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$
7. $A \Rightarrow B \simeq \neg B \Rightarrow \neg A$
8. $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C \models A \Rightarrow (B \wedge C)$
9. $A \Rightarrow C, B \Rightarrow C \models (A \vee B) \Rightarrow C$
10. $(A \vee B) \Rightarrow C \simeq (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
11. $\not\models A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
12. $\not\models \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
13. $\not\models (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$
14. $\not\models (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C)$
15. $\not\models ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

16. $A \wedge B \Rightarrow C \not\models A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

17. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \not\models B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

18. $\not\models A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B))$

Proof　このうちのいくつかを証明する．

1 について．背理法による．仮に 1 が成り立たないとする．このときある構造 $S = (W, @, v)$ に対して $S, @ \not\models \Box A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$．すなわち $S, @ \not\models \Box(\Box A \to \Box(B \to A)$．このときある $w \in W$ に対して $S, w \not\models \Box A \to \Box(B \to A)$．従って $S, w \models \Box A$ かつ $S, w \not\models \Box(B \to A)$．後者よりある $w' \in W$ に対して $S, w \not\models B \to A$，すなわち $S, w' \models B$ かつ $S, w' \not\models A$．しかし $S, w \models \Box A$ より $S, w' \models A$ でなければならない．従って矛盾する．

11 について．$W = \{@, w\}, v_@(p) = 1, v_w(p) = 0, v_w(q) = 1$ であるような構造 $S = (W, @, v)$ を考えよう．このとき $S, w \not\models p$ かつ $S, w \models q$．従って $S, w \not\models q \to p$．従って $S, @ \not\models \Box(q \to p)$．一方で $S, @ \models p$ だから $S, @ \not\models p \to \Box(q \to p)$ よって $S, @ \not\models \Box(p \to \Box(q \to p))$．よって $S, @ \not\models p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$．従ってこの構造 S が反例になる．残りは練習問題とする．　$\Box$

Exercise 3.6. 定理 3.5 の残りを証明しなさい．

3.3.1　厳密含意の欠点

厳密含意に関して重要なのは定理 3.5 の 11-15 である．これは実質含意が持っていた，真なる命題はいかなる命題からも帰結する，および偽なる命題からはいかなる命題も帰結する，などの奇妙な性質を厳密含意が持たないということを意味する．しかしながら厳密含意にも不自然な点がない訳ではない．例えば定理 3.5 の 1 は必然的な命題はいかなる命題からも含意されるということを意味する．従って例えば「大阪が日本の首都ならば $1 + 1 = 2$」が成り立つ．

また例えば 7 などにも場合によっては不自然な点がない訳ではない．例えば「久木田は奥さんに注意されないとひげをそらない」の対偶は「久木田はひげをそると奥さんに注意される」になるが，これは到底推論できそうに思われない．

逆に厳密含意によってブロックされる推論の中には，不自然とは思われないものもある．定理 3.5 の 16 は，厳密含意においては連言 A と B の連言が C を含意するからといって，A という条件のもとで B が C を含意するということが言えない，ということを表わす．17 は A という条件のもとで B が C を含意すると言えるからといって，B という条件のもとで A が C を含意するとは言えない，ということを表わす．18 は，A という条件のもとで，B から A かつ B が結論できないということを表わしている．これらは条件文に関して成り立っているのが自然と思われる性質である．

厳密含意は確かに実質含意では可能だった不自然な推論の一部をブロックすることに成功している．しかしながらそのような推論のすべてがブロックできているわけではない．また厳密含意によっては妥当でなくなるが，自然と思われる推論も存在する．これは何も厳密含意に限ったことではない．どのような条件文の特徴づけに対しても，それにとって不利な事例を日常言語から見つけてくることは可能である．というのもそもそも，日常言語の「ならば」が非常に多様な意味，用法を持っているからである．問題はむしろ，そのように多様な意味を持つ日常言語の条件文を，一緒くたに取り扱おうとしていることであるように思われる．条件文をある仕方で定式化するときに，私たちがしなければいけないのは，その定式化によって日常言語の条件文のどのような側面を捉えようとしているのか，ということを考え，そのことによってその特徴づけを正当化するこ

とである．そのことを最も真剣に受け止め，成功しているのは次節で取り上げる直観主義論理である．

しかし直観主義論理に進む前に，様相論理に関してもう少し述べておこう．上述したように様相論理には様々な異なる体系が存在する．それらの異なる体系を定式化する非常にエレガントな方法があるのである．

3.4 可能世界間の到達可能性とクリプキ意味論

以上の意味論によって定義される論理を $\mathbf{M}$ と呼ぶことにする．$\mathbf{M}$ においては，ある世界で $\Box A$ が成り立つということは，すべての世界で A が成り立つことであると定義されていた．この定義によればある世界で $\Box A$ が成り立つときにはすべての世界でもそれが成り立つことになる．これはまた $\diamond A$ についても同様である．しかしながら必然性と可能性をそのように考えない方が都合がよい場合もある．つまりある命題の必然性と可能性はそれがどの可能世界で評価されるかに依存する，と考えた方が自然に思われる場合があるのである．例えば必然性と可能性をそれぞれ将来について必ず起こることと起こりうることと考えてみよう．私たちの現実世界においては人間が太陽系外に旅をすることは可能であるように思われる．しかし人間が滅びてしまった世界ではそれは不可能である．つまり人間が太陽系外に旅をしている世界は，この現実世界から見れば可能な世界だが，人間が滅びてしまった別な世界では不可能な世界である．

このように可能世界というものはすべて一様なものではなく，ある世界から見て可能な世界と別な世界からみて可能な世界は異なっているものと考えるのは自然である．このアイディアはどのように意味論に組み込めるだろうか．

Definition 3.7 (様相論理のクリプキ・モデル)**.** W は空でない集合，$@ \in W$，$R \subset W \times W$ とする．これまで通り W の要素を**可能世界**，$@$ を**現実世界**と呼ぶ．R は W 上の**到達可能性関係**と呼ばれる．各 $w \in W$ に対して $v_w : \mathbf{Form}_\Box \to \{0, 1\}$ は次の条件を満たす：任意の論理式 A, B に対して

1. $v_w(\neg A) = 1 \iff v_w(A) = 0$
2. $v_w(A \land B) = 1 \iff v_w(A) = 1$ かつ $v_w(B) = 1$
3. $v_w(A \lor B) = 1 \iff v_w(A) = 1$ または $v_w(B) = 1$
4. $v_w(A \to B) = 1 \iff v_w(A) = 0$ または $v_w(B) = 1$
5. $v_w(\Box A) = 1 \iff wRw'$を満たすすべての $w' \in W$ に対して$, v_{w'}(A) = 1$
6. $v_w(\diamond A) = 1 \iff wRw'$を満たすある $w' \in W$ に対して$, v_{w'}(A) = 1$

$v = \{v_w : w \in W\}$ とする．このとき $(W, @, R, v)$ を（様相論理の）**クリプキ・モデル**と呼ぶ．

式の評価，論理的帰結関係は以前と同様に定義されるものとする．このように定義される様相論理の意味論を**クリプキ意味論**と呼ぶ．

さて，この変更によって何が変わったのだろうか．上述したように前節までの構造においては一つの世界で $\diamond A$ が成り立つならばすべての世界でそれが成り立つ．従って $\diamond A \models \Box \diamond A$ が成り立つのである．しかしながらクリプキ意味論においてはこれが成り立たない．また以前の意味論では，あることがある世界で必然的であるならば，それはすべての世界で成り立つので，それは特に現実世界で成り立つ．従って $\Box A \models A$ が成り立つ．しかしながらこれもまたクリプキ・モデルでは成り立たない．現実世界がそれ自身に対して到達可能であるとは限らないからである．実際のところ定理 3.3 の 10 以下の帰結関係はクリプキ意味論においては成り立たない．

しかしながら到達可能性関係に一定の制約を課すことで，私たちはより強い論理を定義することができる．

例えばすべての世界がすべての世界に到達可能であるという条件を課すことで，前節までの様相論理と同じものが得られる．

関係の性質として以下の概念を定義する．

Definition 3.8 (関係の性質)**.** W は集合，$R \subset W \times W$ とする．このとき

- R は**反射的** *reflexive* $\iff$ すべての $w \in W$ に対して wRw.
- R は**対称的** *symmetrical* $\iff$ すべての $w, w' \in W$ に対して wRw' ならば $w'Rw$.
- R は**継続的** *serial* $\iff$ すべての $w \in W$ に対してある $w' \in W$ が存在して wRw'.
- R は**推移的** *transitive* $\iff$ すべての $w, w', w'' \in W$ に対して wRw' かつ $w'Rw''$ ならば wRw''.
- R は**反対称的** *assymmetrical* $\iff$ すべての $w, w' \in W$ に対して wRw' かつ $w'Rw$ ならば $w = w'$.
- R は**前順序** $\iff$ R は反射的かつ推移的.
- R は**順序** $\iff$ R は前順序かつ反対称的.
- R は**ユークリッド的** *Euclidean*：すべての $w, w', w'' \in W$ に対して wRw', wRw'' ならば $w'Rw''$.
- R は**同値関係** *equivalence* $\iff$ R は反射的，対称的，かつ推移的.

Theorem 3.9. $S = (W, R, @, v)$ はクリプキ・モデルであるとする．このとき以下が成り立つ．

1. R が反射的 $\Longrightarrow$ 任意の論理式 A に対して $S \models \Box A \to A$.
2. R が対称的 $\Longrightarrow$ 任意の論理式 A に対して $S \models A \to \Box \diamond A$.
3. R が継続的 $\Longrightarrow$ 任意の論理式 A に対して $S \models \Box A \to \diamond A$.
4. R が推移的 $\Longrightarrow$ 任意の論理式 A に対して $S \models \Box A \to \Box\Box A$.
5. R がユークリッド的 $\Longrightarrow$ 任意の論理式 A に対して $S \models \diamond A \to \Box \diamond A$.

Proof　1 の証明のみを与える．$S = (W, R, @, v)$ はクリプキ・モデルであるとする．R が反射的であるとする．このとき特に $@R@$. 従って任意の論理式 A に対して $@ \models \Box A$ ならば $@ \models A$.

残りは練習問題とする．　$\Box$

Exercise 3.10. 定理 3.9 の残りを証明せよ．

Definition 3.11. クリプキ・モデルは伝統的に以下のように分類されている．

- **K**：任意のクリプキ・モデル.
- **KD**：到達可能性関係が継続的なモデル
- **KT**：到達可能性関係が反射的なクリプキ・モデル
- **KTB**：到達可能性関係が反射的かつ対称的なクリプキモデル
- **S4**：到達可能性関係が反射的かつ推移的
- **S5**：到達可能性関係が同値関係

これらクリプキ・モデルのクラスの各々によって定義される論理を，そのクラスと同じ名前で呼ぶことにする．

Theorem 3.12. クリプキ・モデルのクラスに関して以下が成り立つ．

1. **K** において妥当な推論はすべて **KD** においても妥当である．しかしその逆は成り立たない．

2. **K** において妥当な推論はすべて **KT** においても妥当である．しかしその逆は成り立たない．
3. **KT** において妥当な推論はすべて **KTB** においても妥当である．しかしその逆は成り立たない．
4. **KT** において妥当な推論はすべて **S4** においても妥当である．しかしその逆は成り立たない．
5. **KTB** において妥当な推論はすべて **S5** においても妥当である．しかしその逆は成り立たない．
6. **S4** において妥当な推論はすべて **S5** においても妥当である．しかしその逆は成り立たない．
7. **S5** において妥当な推論はすべて **M** においても妥当であり，かつその逆も成り立つ．

Proof　1 について．一方向はクリプキ・モデルのクラス間の包含関係を考えれば自明である．**K** はすべてのクリプキ・モデルのクラスであるから **KD** に属するクリプキ・モデルはすべて **K** に属する．従ってある推論に関して，**K** において反例がないということは，**KD** においても反例がないということである．逆の方向について．$\Box A \to \Diamond A$ は **KD** では妥当であるということは定理 3.9 の 3 によって示されている．一方で **K** においてはこれが成り立たない．たとえば到達可能性関係が空であるようなモデル $S = (W, \varnothing, @, v)$ を考えればよい．@ から到達可能な世界は存在しないので，任意の論理式 A について空虚に $@ \models \Box A$ が成り立つ．逆に任意の論理式 A について $@ \not\models \Diamond A$ である．従って $@ \not\models \Box A \to \Diamond A$.

2-6 についても同様にして証明ができる．これは練習問題とする．

7 について．任意の **S5** モデル $S = (W, R, @, v)$ に対して，構造 $S' = (W', @, v')$ を次のように定義しよう．

- $W' = \{w : w \in W, @Rw\}$
- 任意の $w \in W'$ と $p \in \mathbf{Atom}$ に対して $v'_w(p) = v_w(p)$.

このとき任意の命題 A と $w \in W'$ について

$$S, w \models A \iff S', w \models A \tag{1}$$

が成り立つことが A の構成に関する帰納法によって証明できる．重要なのは A が $\Box B$ または $\Diamond B$ という形式の場合である．前者について証明しよう．$\Longrightarrow$ の向きについて．$S \models \Box B$ とする．このとき $@Rw$ であるすべての $w \in W$ に対し $S, w \models B$．従って帰納法の仮定よりすべての $w \in W'$ に対して $S', w \models B$．よって $S', @ \models \Box B$．$\Longleftarrow$ の向きについても同様．従って 1 が成り立つ．従ってある推論が **S5** モデル S で妥当であれば，その推論は **M** の構造 S' でも妥当である．

次に逆の方向について．任意の **M** の構造 $S = (W, @, v)$ に対して，**S5** モデル S^* を $(W, W \times W, @, v)$ として定義する．すなわちこれはすべての世界がすべての世界に到達可能なモデルである．このとき任意の命題 A と任意の $w \in W$ に対して

$$S, w \models A \iff S', w \models A \tag{2}$$

が成り立つことが A の構成に関する帰納法によって容易に示される．詳細は練習問題とする．　□

Exercise 3.13. 定理 3.12 の証明を完成させなさい．

Exercise 3.14. 次の定理が成り立つためには，到達可能性関係がどのような制約を満たせば良いか．

1. $\Box A \to \Box^n A$．ただし $\Box^n A$ は A の前に $\Box$ が n 個並ぶ（$n \geq 0$）．
2. $\Box A \to \Box \Diamond A$.