タイプ理論の応用

久木田水生
minao.kukita@gmail.com

京都大学

応用哲学会
2011 年 9 月 25 日

1. タイプ理論への反応
2. タイプ理論の応用
3. タイプの区別はどう正当化されるか
4. まとめ

1 タイプ理論への反応

2 タイプ理論の応用

3 タイプの区別はどう正当化されるか

4 まとめ

悪循環原理

- Whitehead and Russell, *Principia Mathematica* の分岐タイプ理論は，対象に対してタイプとオーダーという二つの分類を課すものである．
- これは次の三つの形式の「悪循環原理」を実装したものである．

VCP1 ある集合が与えられたとき，それが全体を持つと仮定すると等の集合がこの全体を前提する要素を持つことになるならば，その集合は全体を持つことが出来ない．

VCP2 ある集まりのすべてを含むものは何であれ，その集まりの中の一つであってはならない．

VCP3 ある集まりが全体を持つとした時，その集まりがこの全体によってのみ定義可能な要素を持つことになるならば，当の集まりは全体を持たない．

- タイプの区別は VCP2，オーダーの区別は VCP1 と VCP3 に関わっている．
- VCP1，VCP3 に抵触する集まりは非述定的 impredicative であると言われる．

非述定性 impredicativity

- ポアンカレはパラドクスの原因が非述定性にあると考え，それを禁じることを提案した.
- ラッセルの分岐タイプ理論はこのポアンカレの提案を受け入れて考え出されたものである.
- しかし数学においては非述定的定義がしばしば用いられる.
  - 例：最小上界の定義，自然数の定義，ライプニッツ同一性の定義.
- 分岐タイプ理論においては非述定性が禁じられるために，これらの定義が不可能になっている.
- また実数は有理数の集合（あるいは列）として定義されるために，異なるオーダーを持つ実数が存在することになり，それは解析にとって不都合だった.

還元可能性の公理

- そこで Russell は「還元可能性の公理 the axiom of reducibility」という公理を要請して，非述定的定義を可能にした．
- この公理は簡単に言えば，ある全体を前提した定義と論理的に同値で，そのような全体を前提しない定義が存在するということを述べている．

『プリンキピア』への批判

- Ramsey (1925)
  - パラドクスには論理的パラドクスと意味論的パラドクスの二種類があり，数学にとって深刻なのは前者のみである．
  - 前者のパラドクスを回避するにはタイプの区別があれば十分でオーダーの区別は不要である．
  - VCP1 や VCP3 は必要以上に強すぎる制限である．
  - すべての非述定的定義が悪循環ではない．
  - 例えば「この教室で一番背が高い人間」は，定義されている本人を含む全体に言及しながら定義を行っているが，しかし悪循環ではない．

『プリンキピア』への批判

- Wittgenstein, *Tractatus* (1922)
  - 論理学の原理はトートロジーでなくてはならないが，還元可能性の公理はトートロジーではない.
  - 従ってそれは論理学の原理ではない.
  - このような命題を公理として受け入れることは論理主義の目的を失わせる.
- Gödel, “Russell’s mathematical logic” (1944)
  - VCP1 が正当性を持つのは，集合や概念などの対象に対して構成主義的（あるいは唯名論的）な立場を採る場合に限られるように思われる.
  - 一方で集合は「事物の複数性」として，概念は「事物の性質」として，私たちの定義や構成とは独立に存在するものと理解することが出来る.

『プリンキピア』への批判

- Skolem, “Some remarks on axiomatized set theory” (1922)
  - 非述定的定義を可能にすることは望ましくない.
  - 『プリンキピア』の体系から還元可能性の公理を正当化することは出来ない.
- Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory* (1984)
  - 還元可能性の公理は，必要だからという理由だけで，十分な正当化（説明）なしに受け入れられている.
  - そのことによってオーダーを導入した意味は失われ，実質的にオーダーの区別は放棄されている.

『プリンキピア』への批判

- Church “Introduction to Mathematical Logic” (1956)
  - 分岐タイプ理論を採用したのなら非述定的定義を可能にする還元可能性の公理を要請するべきではない.
  - 非述定的定義を認めるならばタイプの区別だけで十分で，オーダーの区別は必要ない.
  - 従って分岐タイプ理論を採用しながら還元可能性の公理を要請するという立場を正当化することは難しい.

『プリンキピア』の問題点

- 構成主義的な立場からはオーダーの区別（非述定性の禁止）は擁護できるが，しかし還元可能性の公理は認められない．
- 実在論の立場からはオーダーの区別は正当化できない．
- このどっちつかずな態度が『プリンキピア』の一番の問題だったように思われる．
- 実際，その後は分岐タイプ理論と単純タイプ理論はそれぞれ異なる文脈で応用された．

1 タイプ理論への反応

2 タイプ理論の応用

3 タイプの区別はどう正当化されるか

4 まとめ

タイプ理論の応用

- 構成主義数学への応用
  - オーダーの区別に基づくの述定的解析.
- 計算機科学への応用
  - λ 計算との結合 $\rightarrow$ プログラミング言語に応用

述定的解析

- 自然数をタイプ 0，自然数の集合をタイプ 1，自然数の集合の集合をタイプ 2,... とする.
- タイプ 0 の量化子しか含まない条件を**算術的**と呼ぶ.
- Weyl, *Das Kontinuum* (1918) は算術的に定義される集合のみを許容する「算術的解析」の理論を立てた.
- Weyl はそこで古典的な多くの定理（Bolzano-Weierstrass の定理, Heine-Borel の被覆定理を含む）が証明できることを示した.
- Kreisel はさらに算術的解析でルベーグ可測集合についての理論の一部が算術的に扱えることを示した.
- また Bishop, *Foundations of Constructive Analysis* (1967) は Cauchy 列を，収束率を計算する関数が存在するものに限り，また距離空間を可分なもの（可算の準基底を持つもの）に限るというアイディアに基づいて，構成的数学を構築した（BCM）．そこでは古典的な解析において重要な定理のほとんどが証明できる.

述定的解析

- Feferman, “Systems of predicative analysis” (1964) は Weyl のアイディアを拡張し，より高階の集合と関数を述定的に扱うための理論を構築した.
- 順序数 α に対して $\mathscr{M}_\alpha$ が次のように定義される
  - $\mathscr{M}_0$ は算術的に定義可能なすべての集合の集合
  - 各 α に対して $\mathscr{M}_{\alpha+1}$ は $\mathscr{M}_\alpha$ に相対化された量化のみを含む条件によって定義されるすべての集合.
  - 各極限順序数 α に対して $\mathscr{M}_\alpha = \cup_{\beta<\alpha}\mathscr{M}_\beta$
- ただしここで順序数は次の**自律性の条件**という制約を受ける.
  - 極限順序数 α に対して $\gamma < \alpha$ と，順序対 $\langle x, y\rangle$ の集合 $T = S \times S$ が存在して，$T \in \mathscr{M}_\gamma$ かつ $\alpha \simeq (S, T)$.
- このように定義される集合を**述定的に定義可能な集合**と呼ぶ.

述定的解析

- Kreisel，Feferman らは次のようなテーゼを提唱している：

  すべての述定的に定義可能な集合は $\mathscr{M}_{\omega_1}$ に属する.

述定的解析

- ある集合 S が**超算術的** *hyperarithmetic* であるのは，ある算術的条件 $\mathfrak{A}(x, Y)$ と $\mathfrak{B}(x, Z)$ が存在して，

  H1 $\forall x(\exists Y \mathfrak{A}(x, Y) \iff \forall Z \mathfrak{B}(x, Z))$
  H2 $\forall x(x \in S \iff \exists Y \mathfrak{A}(x, Y))$

  が成り立つときである．
- Kleene は超算術的集合の階層 $\mathscr{H}_\beta$ で，次の条件を満たすものがあることを証明した．
  - $\mathscr{M}_\alpha = \mathscr{H}_{\omega_{(1+\alpha)}}$
  - 各極限順序数 $\beta < \omega_1$ に対して $\mathscr{H}_\beta = \cup_{\gamma<\beta} \mathscr{H}_\gamma$
  - 各 $\beta < \omega_1$ と $S \in \mathscr{H}_{\beta+1}$ に対して，算術的条件 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ が存在して，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ は H1 と H2 を満たし，かつそこでの量化子が $\mathscr{H}_\beta$ に相対化されたときにもまたそれを満たす．

述定的解析

- $\mathscr{H}_\beta$ に属する集合の全体に言及して定義された集合 S が，そのような全体への言及をせずにも定義できるということを意味している（弱いバージョンの還元可能性の公理が成り立つ）.
- さらに Kleene は次のことを証明した.
  - $\mathscr{M}_{\omega_1}$ は超算術的集合の集合と一致する.

述定的解析

- Feferman はこのような述定的に定義可能な集合を基礎にして，解析の再構築を行っている．彼はその体系を **W** と呼んでいる．
- **W** では任意の関数 f に対して $(\forall x f(x) = 0) \vee (\exists x f(x) \neq 0)$ が成り立つ．これを限定された全知の原理（LPO）という．
- LPO は Bishop の構成的数学（BCM）では証明できない
- BCM において証明できることはすべて **W** で証明できる．
- 古典的命題 ϕ の構成的な翻訳 ϕ^* に対して $\phi^* \wedge \mathrm{LPO} \rightarrow \phi$ が成り立つことが知られている．
- 従って BCM で証明できることの古典バージョンが **W** で証明できる．

述定的解析

- ただし **W** では最小上界定理は証明できない.
- BCM と同様に **W** でも，一般に距離空間は可分なものに限定されている.
- この制限の下で，例えば Stone-Weierstrass 定理（Weierstrass の近似定理の一般化．コンパクトなハウスドルフ空間 X から **R** への任意の連続関数は $C(X, \mathbf{R})$ 上の代数の部分代数で近似できる）が成り立つ.

述定的解析

- 測度論に関しては，**W** では外測度が扱えないため，それ自身とその補集合が有限被覆で近似できる集合を可測集合として，その近似によって測度を与える．
- この線に沿ってルベーグ積分や関数解析も扱える．
- 可分なバナッハ空間やヒルベルト空間の線形作用素を扱うことができ，有界作用素のスペクトル理論を行うことが出来る．

述定的解析

- 以上のような結果を踏まえて Feferman は次のような予測を立てる：

  科学に応用できる解析のすべて（あるいはほとんどすべて）は
  W の中で遂行できる.

型付き λ 計算

- 型付き λ 計算：λ 項に対して，次の規則に従ってタイプを付与し，タイプに従って λ 項の適用を制限する．
  - $x : \sigma, M : \tau \Rightarrow \lambda x.M : \sigma \to \tau$
  - $M : \sigma \to \tau, N : \sigma \Rightarrow (MN) : \tau$
- これによって関数 M のそれ自身への適用 (MM) は禁じられる．

型付き λ 計算

- 型なし λ 計算では関数の自己適用が許される．
- そのために計算が終わらないような関数がある．
- 例：$gf = f(ff)$ によって定義される関数 g を考える．g を g 自身に適用すると $gg = (gg)g = ((gg)g)g = \ldots$ となって計算が終了しない．
- 一方で型付き λ 計算では，どのような計算も必ず有限のステップで終了する（**強正規性**）．

型付き λ 計算

- λ 計算は抽象的な記号操作の体系であるが，自然数上の関数と見なすことができるものを λ 計算の中で定義することが出来る．
- また型なし λ 計算で定義できる関数は，チューリング・マシンで計算できる関数に正確に一致する．
- しかし型付き λ 計算では定義できない関数で，チューリング計算可能なものが存在する．
- なお多項式はすべて型付き λ 計算で計算できる．

型付き λ 計算

- 型付き λ 計算に，不動点演算子を加えるとチューリング完全になる．
- ある λ 項 F が不動点演算子であるのは，任意の λ 項 M に対して $M(FM) = FM$ が成り立つときである．
- 不動点演算子を加えたとき，強正規性は失われる．

型付き λ 計算

- 強正規性はどのような計算も必ず出力を持つことを保証する．
- これと**合流性**あるいは **Church-Rosser 性**——M が N と N' に変換されるならば，ある P が存在して N と N' の双方が P に変換される——によって，型付き λ 計算では任意の λ 項の計算が一意的な結果を持つことが保証される．
- これは計算の体系にとって望ましい性質である．
- また **Curry-Howard 同型**を通して論理の側を見ると，これらの性質は，任意の定理が一意的な正規的証明を持つということを保証している．

Curry-Howard 同型

論理		型付き λ 計算
命題論理	$\Longleftrightarrow$	単純型付き λ 計算
一階述語論理	$\Longleftrightarrow$	依存型理論
二階命題論理	$\Longleftrightarrow$	多態型理論
	etc.	
命題	$\Longleftrightarrow$	型
$\rightarrow$-I ($\forall$-I)	$\Longleftrightarrow$	抽象
$\rightarrow$-E ($\forall$-E)	$\Longleftrightarrow$	関数適用
証明	$\Longleftrightarrow$	項
正規化	$\Longleftrightarrow$	縮約
	etc.	

1 タイプ理論への反応

2 タイプ理論の応用

3 タイプの区別はどう正当化されるか

4 まとめ

タイプの制限による効果

- 述定的解析においては，Poincaré や Russell が不当と見なした悪循環（非述定的定義）を用いずに，解析のかなりの部分を再構築することが出来る．
- 型付き λ 計算では，一意的な計算の結果が得られることが保証される．
- またプログラミングにおいては，変数にタイプの宣言をするによってエラーが発見しやすくなり，プログラミングの効率も上がる．

タイプの制限による損失

- 述定的解析：
  - 最小上界定理が証明できない.
  - 閉区間上の任意の関数が一様連続になる.
  - 非可測集合の存在が証明できない.
  - Etc.
- 型付き λ 計算
  - 関数の自己適用が禁じられる.
  - 不動点演算子が定義できない.
  - チューリング完全にならない.
  - Etc.
- タイプの制限はこれらの損失にも関わらず受け入れられるのに十分な正当性を持つのか？

タイプの正当化

- Russell は「ある関数は，そのすべての値が既に正しく定義されていない限り，正しく定義された関数ではない」と言っている．
- 命題関数「x は青い」のタイプは，x に代入したときにこの命題関数が有意味になるような x の値の集まりである．
- この集まりが制限されなければならない理由は何か？
- 特に「x は青いは青い」という自己適用的表現が無意味でなければならない理由は？
- Russell によれば「x は青い」という命題関数は，それが値として取りうる命題すべてを前提しており，従って悪循環原理により，その命題関数自身はその有意味性の範囲に入らないのである．

タイプの正当化

- タイプの制限が正当化されるのは，Russell のように，対象を段階的に構成されるものと見なす場合である．
- Ramsey や Gödel のような実在論的見地からは，このような区別は正当化されない．
- しかし実際には実在論者もある程度はこのような区別を認める．
- 例えば集合と類（class）の区別は広く受け入れられている（ただし Ramsey や Gödel がこの区別を受け入れるかどうかは不明）．
- しかし集合と類の区別を受け入れながら，集合間の階層の区別を受け入れないのはなぜだろうか？

数学的構造一般の理論

- 集合と類の区別が不都合な場合もある.
- 群などの，特定の数学的構造の全体を扱う場合.
- 半群の全体 **SGroup** と，直積半群を形成する操作の組み合わせは半群をなすと考えるのが自然である.
- しかし従来の集合論に基づいて半群を定義するとすれば半群の全体とその上の直積は半群ではない.

数学的構造一般の理論

- そこで Feferman “Categorical foundations and foundations of category theory” は，数学的構造一般を研究するための基礎となる理論が必要であることを主張し，そのような理論は次のような要件を満たすべきである，と述べている．

R1 特定の構造すべてからなる圏を構成することを可能にする．

R2 任意の圏 A, B に対して関手圏 B^A を構成することを可能にする．

R3 通常の基本的な数学的構造の存在を確立し，通常の集合論的操作を遂行することを可能にする．

R4 現在受け入れられている集合論の体系と相対的に無矛盾であることが確立される

数学的構造一般の理論

- Feferman が提案する理論は，構文論的に定義された**部分コレクション** *partial collection* と**部分操作** *partial operation* の体系である．
- 部分コレクションとは，集合と異なって任意の要素に関して，それがその部分コレクションに属しているか属していないかが決まっていなくても良いものである．
- 部分操作とは，その操作のドメインの任意の対象に対してその結果が定義されていなくても良いものである．
- これは内包的な理論であり，自己適用を許すという点で特徴的である．
- したがってこの理論は型なし λ 計算に近いものである．

数学的構造一般の理論

- このような理論は，圏論のように複数の数学的構造の関係を研究するような分野においては重要な基礎的役割を果たすだろう．
- 一方で圏論のような分野は，数学の本流ではなく，数学の本流の基礎に関してはやはり従来の集合論で十分だという考えもある．
- 哲学者はこのような理論の直観的な意味や，実用的価値を超えた正当性を考察する必要があるだろう．
- 特に自己適用を許すような理論についての考察が必要である．
  - Abramsky and Ong, “Lazy lambda calculus” (1993)
  - Barwise and Moss, Vicious Circle (1996)
  - Leitgeb and Hiek, “Circular language” (2005)
  - Restall, “Coformulas” (forthcoming)

1 タイプ理論への反応

2 タイプ理論の応用

3 タイプの区別はどう正当化されるか

4 まとめ

数学の実践の多様性

- 構成主義：オーダーの要請が合理的.
- 古典数学：実在論的．オーダーは不要．より緩いタイプの制限.
- 数学的構造一般の理論：よりドラスティックに無制限.

数学全体を一つ言語的モデルでくくるのは乱暴だし，現実的ではない

数学の実践のよりきめ細かい分析が必要だろう.