平成２２年度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入 学 試 験 問 題

専　　　　　門

平成２２年２月１２日（金）
１２：３０～１４：００

注　意　事　項

1．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

2．試験終了まで退出できない。

3．外国人留学生は、英語で解答してよい。また、語学辞書（１冊）持ち込んでもよい。

4．問題冊子、解答用紙２枚、草稿用紙２枚が配布されていることを確認せよ。

5．問題は、数学基礎（線形代数、微分積分）、離散数学の３題からなる。
このうち**２題を選択して**解答せよ。

また、選択した問題名または問題番号を解答用紙の指定欄に記入せよ。

6．解答用紙の指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

7．解答用紙は試験終了後に２枚とも提出せよ。

8．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題 1．(線形代数)

以下の問に答えよ．

(1) W_1 と W_2 を n 次元ベクトル空間 V の部分空間とする．もしも $W_1 \neq W_2$ かつ $\dim(W_1) = \dim(W_2) = n-1$ ならば，$\dim(W_1 \cap W_2) = n-2$ となることを証明せよ．ただし，$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$ を用いても良い．

(2) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k, \vec{w}$ をベクトル空間 V の要素とする．もし $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ が一次独立であって $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k, \vec{w}$ が一次従属であるならば，$\vec{w}$ は $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ の一次結合として表すことができることを証明せよ．

(3) 次の行列 A は対角化可能であるか判定せよ．もしも対角化可能ならば，変換行列 P と対角行列 D を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

問題 2.（微分積分）

以下の問に答えよ．

(1) $(e^{2x}f(x))' = e^{2x}(f'(x) + 2f(x))$ が成り立つことに注意して，

(i) $f'(x) = -2f(x),\ f(0) = 1$ をみたす関数 f を求めよ．

(ii) $g'(x) = -2g(x) + x,\ g(0) = 1$ をみたす関数 g を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の領域 D を $D = \{(x, y) | x \geqq 0, y \geqq 0\}$ で定める．実数 a に対して，積分

$$\iint_D \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^a}\, dxdy$$

の収束・発散を調べよ．また，収束する場合は積分の値を求めよ．

問題 3.（離散数学）

正の整数 k, l および 3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & k & 1 \\ 2 & l & 3 \end{pmatrix}$$

に対して，以下の問に答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を k, l を用いて表せ.

(2) A が正則であることを示せ.

(3) M をすべての成分が整数である正則行列とする．M の逆行列の成分がすべて整数ならば，$|M| = \pm 1$ が成り立つことを示せ.

(4) A の逆行列の成分がすべて整数となるような k, l を決定せよ.