平成２３年度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入 学 試 験 問 題

専　　　　　門

平成２３年２月９日（水）
１２：３０～１４：００

注　意　事　項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．外国人留学生は、英語で解答してよい。また、語学辞書（１冊）持ち込んでもよい。

４．問題冊子、解答用紙２枚、草稿用紙２枚が配布されていることを確認せよ。

５．問題は、線形代数、微分積分、離散数学の３題からなる。
このうち**２題を選択して**解答せよ。

また、選択した問題名または問題番号を解答用紙の指定欄に記入せよ。

６．解答用紙の指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

７．解答用紙は試験終了後に２枚とも提出せよ。

８．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題 1．(線形代数)

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について以下の各問に答えよ．

(1) A が対角化可能（diagonalizable）となる実数 a の値を求め，そのような A について対角化を実行せよ．

(2) 直交行列（orthogonal matrix）によって A が対角化可能な実数 a の値を求め，そのような A について直交行列による対角化を実行せよ．

問題 2. (微分積分)
以下の各問に答えよ.

(1) 条件 $x^2 + 4y^2 = 2$ のもとで $f(x, y) = xy$ の極値 (extremal values) を求めよ.

(2) 以下の問に答えよ.

(i) $0 \leqq x \leqq \pi/3$ を満たす任意の実数 x に対して，不等式

$$\frac{x}{2} \leqq \sin x \leqq x$$

が成り立つことを示せ.

(ii) p を実数とするとき，広義積分 (improper integral)

$$\int_0^1 \frac{(\log x)^2}{x^p} dx$$

の収束・発散 (convergence, divergence) を調べよ．また，収束する場合はその積分の値を求めよ.

(iii) q を実数とするとき，広義積分

$$\int_0^1 \frac{(\log x)^2}{x^q \sin x} dx$$

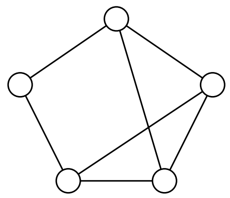
の収束・発散を調べよ.

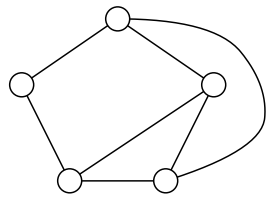
問題 3．(離散数学)

離散数学は選択問題である．次の I，II の いずれか**一方を選択**して 答えよ．解答用紙の指定欄に，どちらの問題を選択したのかはっきり分かるように記入せよ．

I.

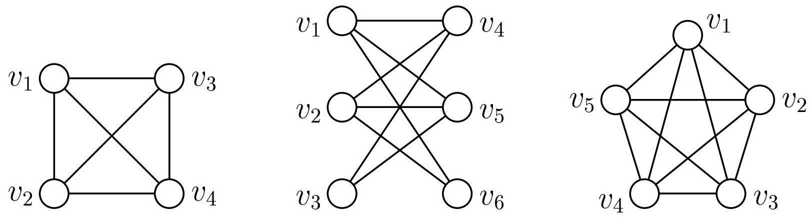
頂点集合 (vertex set) V，辺集合 (edge set) E よりなる無向グラフ (undirected graph) $G = (V, E)$ を考える．辺の交差が無いようにグラフを平面上に描くことをグラフの平面描画 (plane drawing) といい，平面描画が可能なグラフを平面的グラフ (planar graph) という．例えば，5 頂点よりなる以下の左のグラフは，右のように平面上に辺の交差なく描くことができるので，平面的グラフである．





以下の各問に答えよ．

(1) 次の 3 つのグラフ G_1, G_2, G_3 のそれぞれが平面的グラフであるか否かを答えよ．平面的グラフであると答えた場合は，その平面描画も示せ（その際，頂点のラベル（v_1, v_2 など）を略さずに記すこと）．



G_1　　G_2　　G_3

(2) あるグラフ G に対し，どの辺もその両端点 (end vertices) の色が異なるように全ての頂点に色を割り当てるとき，必要となる色数の最小値を G の彩色数 (chromatic number) という．彩色数が 4 であるような平面的グラフの例をひとつ示せ．

II.

以下の各問に答えよ.

(1) 次の連立合同式（simultaneous system of congruences）を満たす整数 x を求めよ.

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \mod 9 \\ x \equiv 8 & \mod 10 \\ x \equiv 2 & \mod 12 \\ x \equiv 2 & \mod 21 \end{cases}$$

(2) 合同式 $x^2 \equiv 1 \mod n$ が次の個数の解をもつ法（modulus）n の例を挙げよ．ただし，n が存在しない場合はその理由を述べよ.

(i) 2 個

(ii) 3 個

(iii) 4 個