平成２４年度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入　学　試　験　問　題

専　　　　　門

平成２３年８月９日（火）
１２：３０～１５：３０

注　意　事　項

1．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

2．試験終了まで退出できない。

3．外国人留学生は、英語で解答してもよい．さらに，電子辞書以外の辞書（１冊）を持ち込んでもよい。

4．問題冊子、解答用紙３枚、草稿用紙３枚が配布されていることを確認せよ。

5．問題は、線形代数、微分積分、離散数学、数理論理学、確率論、統計学、量子力学、アルゴリズム設計法、オートマトン理論、プログラミングの１０題からなる。
このうち**３題を選択して**解答せよ。

選択した問題名または問題番号を解答用紙の指定欄に記入せよ。

ただし，離散数学と数理論理学はともに選択問題であり、それぞれの問題はIとIIからなる。これらの問題を選択する場合は、IまたはIIの一方のみを答えよ。

6．解答用紙の指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

7．解答用紙は試験終了後に３枚とも提出せよ。

8．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題 1．(線形代数)
a, b を定数（constant）とし，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．次の各問に答えよ．

(1) A の行列式（determinant）を求めよ．

(2) A が対角化可能（diagonalizable）であるように a, b を定め，そのときの変換行列（transformation matrix）と対角行列（diagonal matrix）を求めよ．

問題 2．(微分積分)
以下の問に答えよ．

(1)(i) $f(x) = x - 1 - \log x$ とする．$x > 0$ に対して $f(x) \geq 0$ となることを示せ．

(ii) $y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$ を $2n$ 個の正の実数 (positive real number) とし，次の等式 (equality)

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

を満たすとする．このとき

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \log \frac{y_k}{z_k} \geq 0$$

が成り立つことを示せ．また，等号 (equality sign) が成立する必要十分条件 (necessary and sufficient condition) を求めよ．

(iii) 条件 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1$, $z_1 > 0, z_2 > 0, z_3 > 0, z_4 > 0$ のもとで

$$g(z_1, z_2, z_3, z_4) = -\log z_1 - 2\log z_2 - 3\log z_3 - 4\log z_4$$

の最小値 (minimum value) を求めよ．

(2) 円柱 (circular cylinder)：$x^2 + y^2 = 2y$ の内部で，曲面 (surface)：$z = x^2 + y^2$ と平面 (plane)：$z = 0$ に囲まれた領域の体積 (volume) を求めよ．

問題 3．(離散数学)

離散数学は選択問題である．次の I，II の いずれか**一方を選択して** 答えよ．解答用紙の指定欄に，どちらの問題を選択したのかはっきりわかるように記入せよ．

I．

N を節点集合 (node set)，E を辺集合 (edge set) とする単純無向グラフ (simple undirected graph) $G = \langle N, E \rangle$ が与えられている ($|N| \geq 3$)．各節点 $v \in N$ の次数 (degree) を d_v と記す．以下の各問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{v \in N} d_v$ が偶数 (even number) であることを示せ．

(2) 奇数 (odd number) の次数を持つ節点の数は偶数であることを示せ．

(3) グラフ G が連結 (connected) である場合，同じ次数を持つ節点が少なくとも 2 つ存在することを示せ．

(4) すべての $v \in N$ に対して $d_v \geq |N|/2$ が成り立つとき，以下の (i) と (ii) を証明せよ．

(i) グラフ G の最大長 (maximum length) のパス (path) $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ を考える．このとき，$(v_i, v_k) \in E$ と $(v_1, v_{i+1}) \in E$ となる i $(1 \leq i \leq k-1)$ が存在する．

(ii) (i) の結果を用いて構成される閉路 (cycle) $(v_1, v_2, \ldots, v_i, v_k, v_{k-1}, \ldots, v_{i+1}, v_1)$ はハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle) である．ただし，ハミルトン閉路とはすべての節点を一度だけ通る閉路である．

II．

$n \geq k$ を満たす自然数（positive integers）n, k に対して，次の各問に答えよ．
なお，$\binom{a}{b}$ は二項係数（binomial coefficient）を表す（${}_aC_b$ とも書く）．

(1) $n > k$ のとき，

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

が成り立つことを示せ．

(2)

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 非負整数 l に対して，方程式（equation）

$$x_1 + \cdots + x_k = l$$

の異なる非負整数解（solutions in non-negative integers）の個数を求めよ．

(4) 不等式（inequality）

$$x_1 + \cdots + x_k \leq n$$

の異なる非負整数解の個数を求めよ．

問題 4．(数理論理学)

数理論理学は選択問題である．次の I，II の いずれか**一方を選択して** 答えよ．解答用紙の指定欄に，どちらの問題を選択したのかはっきりわかるように記入せよ．

I． $\mathbb{R}$ を実数 (real number) の集合とする．以下の各問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ の部分集合 A は整列 (well-order) ならば可算 (countable) であることを示せ．

(2) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に辞書式順序 (lexicographic order) を入れる．この時，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の部分集合 A は整列ならば可算であることを示せ．

II． 以下の各問に答えよ．

(1) 有向グラフ (directed graph)$\langle N, E\rangle$ を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 有向グラフの節点 (node) に対応した命題変数 (propositional variable) の集合を $\{x_n \mid n \in N\}$ で与える．次の命題論理式 (propositional formula)P を考える．

$$P : \bigwedge_{(n,n')\in E} (x_n \to x_{n'})$$

ある $n_0, n_1 \in N$ に対し $\sigma(x_{n_0}) = \text{true},\ \sigma(x_{n_1}) = \text{false}$ となり，論理式 P を充足する (satisfy) 付値 (assignment)σ が存在したとする．このとき，節点 n_0 と n_1 はグラフ上でどのような関係にあるかを簡潔に述べよ．

(ii) 有向グラフ $\langle N, E\rangle$ が強連結 (strongly connected) でないことと充足可能であることが等価となる命題論理式 Q を与えよ．
なお，有向グラフ $\langle N, E\rangle$ が強連結であるとは，任意の節点 $n, n' \in N$ に対し n から n' への道 (path) が存在することである．

(iii) (ii) で与えた命題論理式 Q が充足可能であるとする．このとき，有向グラフ $\langle N, E\rangle$ が強連結でないことを簡潔に説明せよ．

(2) 否定標準形 (negation normal form) とは次の文法により生成される命題論理式のことである．ここで，LIT はリテラル (literal) の集合を表すとする．

$$\text{NNF} ::= \text{LIT} \mid \text{NNF} \land \text{NNF} \mid \text{NNF} \lor \text{NNF}$$

全ての命題変数が高々1回しか出現しない否定標準形 Q を考える．このような全ての Q が充足可能であることを，否定標準形の構造に関する帰納法 (structural induction) で証明せよ．なお，帰納法の仮定 (induction hypothesis) を用いた箇所は明示すること．

問題 5．(確率論)

確率変数 (random variable) X, V はそれぞれ開区間 (open interval) $(0,1)$ 上の一様分布 (uniform distribution) に独立 (independent) に従うとする．また $U = X/(1-X)$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) X の期待値 (expectation) と分散 (variance) を求めよ．
(2) U の確率密度関数 (probability density function) を求めよ．
(3) $U+V$ の確率密度関数を求めよ．

問題 6．(統計学)

確率変数 (random variable) $X_1, \ldots, X_n$ は独立に同一の分布に従う (independently and identically distributed)．各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ と自然数 (natural number) k に対して，事象 (event) $X_i = k$ の確率 (probability) $P(X_i = k)$ を，非負のパラメータ (non negative parameter) θ を用いて次のように定義する．

$$\theta > 0 \quad \text{のとき} \quad P(X_i = k) = \frac{1}{e^\theta - 1} \cdot \frac{\theta^k}{k!} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\theta = 0 \quad \text{のとき} \quad P(X_i = k) = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ 0, & k = 2, 3, 4, \ldots . \end{cases}$$

以下の各問に答えよ．

(1) X_1 の期待値 (expectation) を求めよ．
(2) $X_1, \ldots, X_n$ から定まる θ の最尤推定量 (maximum likelihood estimator) を $\widehat{\theta}$ とする．$X_1 = \cdots = X_n = 1$ のとき $\widehat{\theta}$ を求めよ．
(3) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i > 1$ のとき，最尤推定量 $\widehat{\theta}$ に関して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \; > \; \widehat{\theta}.$$

問題 7.（量子力学）

A, B は複素内積空間（complex inner product space） $\mathcal{H}$ 上で定義されたエルミート作用素（Hermitian operator）で，ある零でない定数 k が存在して，

$$AB - BA = kI$$

を満たすものとする．ただし，I は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素（identity operator）を表す．このとき，次の各問に答えよ．

(1) k は純虚数（purely imaginary number）であることを示せ．
(2) $\mathcal{H}$ に属する任意の単位ベクトル（unit vector） ψ に対して，

$$\|A\psi\| \, \|B\psi\| \geq \frac{|k|}{2}$$

が成り立つことを示せ．
(3) このような A, B が存在すれば，$\mathcal{H}$ は無限次元（infinite dimensional）であることを示せ．

問題 8. (アルゴリズム設計法)

n 個の整数 (integers) $a_1, \ldots, a_n$ に対し，これらの i 番目から j 番目までの和 (sum) を

$$s(i,j) = \sum_{k=i}^{j} a_k$$

と定義する (ただし $1 \le i \le j \le n$). また，l と r (ただし $1 \le l \le r \le n$) に対して i と j が $l \le i \le j \le r$ を満たすときの $s(i,j)$ の最大値 (maximum value) を $f(l,r)$ と表す．つまり

$$f(l,r) = \max_{l \le i \le j \le r} s(i,j)$$

である．以下では $f(1,n)$ を求めるアルゴリズム (algorithm) を考える．以下の各問に答えよ．

(1) $n = 5$, $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = 3$, $a_4 = -2$, $a_5 = 3$ であるとき，$f(1,5)$ を求めよ．

(2) $1 \le i \le j \le n$ を満たす i と j 全てに対して $s(i,j)$ を計算したのちそれらの最大値をとれば $f(1,n)$ が得られる．この計算を $O(n^2)$ 時間で行うアルゴリズムを与えよ．

(3) 分割統治法 (divide-and-conquer method) に基づくアルゴリズムを考える．

(i) $m = \lfloor n/2 \rfloor$ に対して $f(1,m)$ と $f(m+1,n)$ が既知であるとき，これらを利用して $f(1,n)$ を求める方法を述べ，その時間計算量 (time complexity) を求めよ．

(ii) 分割統治法の考え方に基づいて設計したアルゴリズムの計算時間 (computation time) を $T(n)$ として，$T(n)$ に関する漸化式 (recurrence formula) を書き下せ．また，このアルゴリズムの時間計算量を求めよ．

(4) 動的計画法 (dynamic programming) に基づくアルゴリズムを考える．

(i) $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$g(j) = \max_{1 \le i \le j} s(i,j)$$

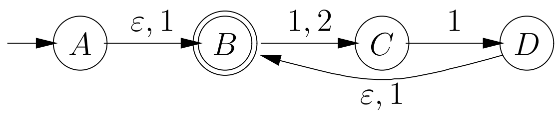
と定義するとき，$g(j)$ $(j \ge 2)$ を $g(j-1)$ を用いて表す漸化式，および $f(1,j)$ を $g(j)$ と $f(1,j-1)$ を用いて表す漸化式を書け．

(ii) 動的計画法に基づくアルゴリズムの時間計算量を求めよ（理由も簡潔に述べること）．

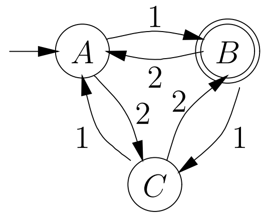
問題 9. (オートマトン理論)

アルファベット (alphabet) $\Sigma = \{1, 2\}$ とする．各問に答えよ．

(1) 次に示されるオートマトン (automaton) と等価な決定性 (deterministic) オートマトンのうち，状態数最小 (smallest number of states) のものを図示せよ．



(2) 次に示されるオートマトン M について，各問に答えよ．



(i) M が認識 (recognize) する言語 (language) $L(M)$ の要素で長さ 3 以下のものを全て示せ．

(ii) $L(M)$ を表す正規表現 (regular expression) を示せ．

(iii) Σ 中の文字を数と自然に解釈して，文字列に現れる数の総和 (total sum) を表す関数 ϕ は，以下のように定義される．

$$\phi(\varepsilon) = 0$$

$$x \in \Sigma,\ w \in \Sigma^* \text{に対して，} \quad \phi(wx) = x + \phi(w)$$

このとき，任意の $w \in \Sigma^*$ に対して，以下の全てが成り立つことを帰納法 (induction) により証明せよ．ここで，δ は M の遷移関数 (transition function) である．

i. $\delta(A, w) = A \iff \phi(w) \equiv 0 \pmod 3$

ii. $\delta(A, w) = B \iff \phi(w) \equiv 1 \pmod 3$

iii. $\delta(A, w) = C \iff \phi(w) \equiv 2 \pmod 3$

問題 10. (プログラミング)
（情報システム学専攻のプログラミングの問題と同じ）