平成２４年度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入　学　試　験　問　題

専　　　　　門

平成２４年２月８日（水）
１２：３０〜１４：００

注　意　事　項

1．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

2．試験終了まで退出できない。

3．外国人留学生は、英語で解答してもよい．さらに，電子辞書以外の辞書（１冊）を持ち込んでもよい。

4．問題冊子、解答用紙２枚、草稿用紙２枚が配布されていることを確認せよ。

5．問題は、線形代数、微分積分、離散数学の３題からなる。
このうち２題を選択して解答せよ。

選択した問題名または問題番号を解答用紙の指定欄に記入せよ。

ただし，離散数学は選択問題であり、問題はIとIIからなる。これらの問題を選択する場合は、IまたはIIの一方のみを答えよ。

6．解答用紙の指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

7．解答用紙は試験終了後に２枚とも提出せよ。

8．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題 1. (線形代数)

行列 $A = \begin{pmatrix} p & q & -2 \\ r & 5 & s \\ t & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (p, q, r, s, t は実数 (real number)) に対し, 3 次正則行列 (invertible matrix of order 3) P が存在して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が成り立つとする. このとき, 以下の各問に答えよ.

(1) $\det A$ (A の行列式 (determinant)) の値は何か.

(2) $A - E$ の階数 (rank) はいくつか (ただし E は (3 次) 単位行列 (identity matrix) を表す).

(3) p, q, r, s, t を求めよ.

(4) 上の条件をみたす P を 1 つ求めよ.

問題 2. (微分積分)
以下の各問に答えよ.

(1) 曲線 $y^3 - xy^2 + \cos(xy) = 2$ の, 点 $(0,1)$ における接線 (tangent line) の方程式を求めよ.

(2) (i) $a > 0$ に対して $I(a)$ を以下の広義積分 (improper integral) で定義する.

$$I(a) = \int_0^1 \frac{dx}{x^a}$$

$I(a)$ の収束・発散 (convergence, divergence) を調べよ. また収束するときの $I(a)$ の値を求めよ.

(ii) $b > 0$ に対して $S(b)$ を以下の広義積分で定義する.

$$S(b) = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3b} + x}$$

$0 < b < 1/3$ に対して $S(b)$ の収束・発散を調べよ.

問題 3. (離散数学)

離散数学は選択問題である．次のⅠ，Ⅱのいずれか**一方を選択して**答えよ．解答用紙の指定欄に，どちらの問題を選択したのかはっきりわかるように記入せよ．

Ⅰ．次の各問に答えよ．

(1) 次式が成り立つことを示せ．

$$(x+y)^4+(x-y)^4=2x^4+12x^2y^2+2y^4$$

(2) 次式が成り立つことを示せ．

$$6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2=\sum_{1\le i<j\le 4}\{(x_i+x_j)^4+(x_i-x_j)^4\}$$

(3) 任意の自然数は高々（at most）4 個の自然数の 2 乗の和（sum of squares）で表されることを用いて，次のことを証明せよ：

「任意の自然数は高々53 個の自然数の 4 乗の和（sum of fourth powers）で表される」

例えば，2012 は次のように 32 個の自然数の 4 乗の和で表される：

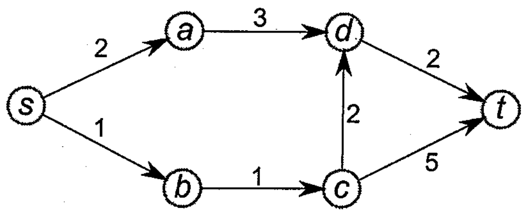
$$\begin{aligned}2012&=6\cdot 335+2=6\cdot(13^2+9^2+9^2+2^2)+2\\&=6\cdot(2^2+2^2+2^2+1^2)^2+6\cdot(3^2)^2+6\cdot(3^2)^2+6\cdot(1^2+1^2)^2+2\cdot 1^4\\&=3\cdot 4^4+15\cdot 3^4+2^4+13\cdot 1^4.\end{aligned}$$

II. N を節点集合 (node set)，E を辺集合 (edge set) とする有向グラフ (directed graph) $G=(N,E)$ と 2 つの節点 $s \in N$ と $t \in N$ が与えられている．各辺 $(u,v) \in E$ は非負の重み c_{uv} を持つ．部分集合 $X \subset N$ に対して，$s \in X$ かつ $t \notin X$ であるとき，X を s-t カット (s-t cut) と呼び，その容量 (capacity) を $d(X, N \setminus X)$ で定義する．ただし，$d(A,B)$ は，部分集合 $A, B \subset N$ に対して，

$$d(A,B) = \sum_{(u,v)\in E, u\in A, v\in B} c_{uv}$$

とする．最小の容量を持つ s-t カットは最小 s-t カット (minimum s-t cut) と呼ばれる．以下では簡単のため s-t カット X の容量を $d(X)$ と表す．
このとき，以下の各問に答えよ．

(1) 下図で与えられるグラフの最小 s-t カットをすべて列挙せよ．



(2) G の任意の s-t カット U と W に対して，$U \cup W$ と $U \cap W$ も G の s-t カットであることが分かっている．このとき，以下の式が成り立つことを示せ．

$$d(U) + d(W) \geq d(U \cup W) + d(U \cap W).$$

(3) G の最小 s-t カット全ての集合を $\mathcal{D}$ とする．このとき，問 (2) の式を用いて

$$U, W \in \mathcal{D} \Longrightarrow U \cup W, U \cap W \in \mathcal{D}$$

が成り立つことを示せ．