平 成 ２５ 年 度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入 学 試 験 問 題

専　　　　門

平成２４年８月９日（木）
１２：３０～１５：３０

注 意 事 項

1．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

2．試験終了まで退出できない。

3．外国人留学生は、語学辞書１冊に限り使用してよい。
電子辞書の持ち込みは認めない。

4．問題冊子、解答用紙３枚、草稿用紙３枚が配布されていることを確認せよ。

5．問題は線形代数、微分積分、離散数学、数理論理学、確率・統計、量子力学、アルゴリズム設計、オートマトン理論、プログラミングの９題からなる。
このうち３題を選択して解答せよ。

選択した問題名または問題番号を解答用紙の指定欄に記入せよ。

ただし、離散数学と数理論理学はともに選択問題である。離散数学または数理論理学を解答する場合は選択した１題のみを答えよ。

6．解答用紙は指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

7．解答用紙は試験終了後に３枚とも提出せよ。

8．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題 1. (線形代数)
a, b, c を実数（real number）とし,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & a \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, $\mathrm{Im}(A) = \{A\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\}$ とする．次の各問に答えよ．

(1) A の階数 (rank) を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A)$ が 1 次元となるような a, b, c を求めよ．

問題 2. (微分積分)
以下の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ を $x > 0$ に対して定義された関数とする．$f(x)$ は 2 階微分可能 (twice differentiable) であり，また以下の等式が成り立つ．

$$x^4 + 3(f(x))^4 - xf(x) = 0.$$

このとき $f(x)$ の極値 (extremal values) を求めよ．

(2) (i) a, b を実数とし，h を 0 でない実数とする．3 次元空間の 3 点

$$(a, b, ab),\ (a+h, b, (a+h)b),\ (a, b+h, a(b+h))$$

を頂点 (vertices) とする 3 角形 (triangle) の面積 (area) を求めよ．

(ii) c を正の実数とする．3 次元空間における曲面 (surface) : $z = xy$ と円柱 (circular cylinder) : $x^2 + y^2 \leq c^2$ の共通部分 (intersection) の面積を求めよ．

問題 3. (離散数学)

離散数学は選択問題である．次の I, II, III の <u>**ひとつのみを選択して**</u> 答えよ．解答用紙の指定欄に，どの問題を選択したのかはっきり分かるように記入せよ．

I. 以下の各問に答えよ．

(1) G を群とし，$x, y \in G$ に対して，$z^{-1}xz = y$ となる $z \in G$ が存在するとき，$x \sim y$ と定める．

(i) $\sim$ は同値関係（equivalent relation）であることを証明せよ．

(ii) x の同値類（equivalent class）が $\{x\}$ ならば，任意の $y \in G$ に対して，$xy = yx$ であることを証明せよ．

(2) G を有限群，H を G の部分群とする．このとき，H の位数（order）は G の位数の約数（divisor）であることを証明せよ．

(3) 位数が素数である有限群は巡回群（cyclic group）であることを証明せよ．

(4) 有限体の位数は素数のべき（prime power）であることを証明せよ．

II. 正の整数 n に対して，次のすべての条件を満たす集合 V とその部分集合の族（a family of subsets of V）$\mathcal{B}$ を考える．

(a) $|V| = |\mathcal{B}| = n^2 + n + 1$.

(b) $\mathcal{B}$ の任意の要素 B に対して，$|B| = n + 1$.

(c) $\mathcal{B}$ の任意の 2 つの異なる要素 B, B' に対して，$|B \cap B'| \leq 1$.

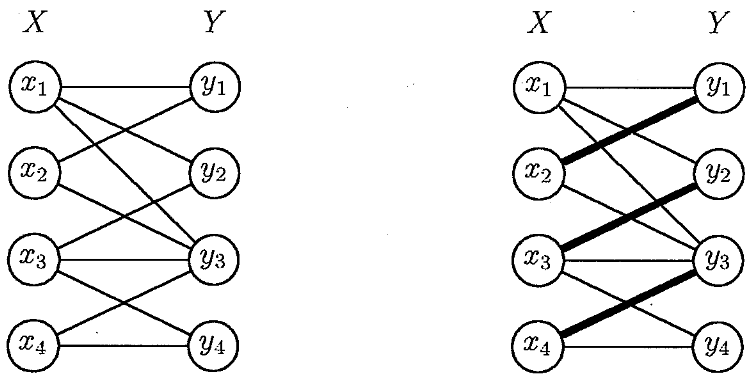
V の各要素 v に対して $m_v = |\{B \in \mathcal{B} \mid v \in B\}|$ とおく．このとき以下を示せ．

(1) $\sum_{v \in V} m_v = (n^2 + n + 1)(n + 1)$.

(2) V の任意の要素 v に対して，$m_v = n + 1$.

(3) $\mathcal{B}$ の任意の 2 つの異なる要素 B, B' に対して，$|B \cap B'| = 1$.

III. 頂点 (vertex) 集合 X, Y，辺 (edge) 集合 $E \subseteq X \times Y$ よりなる 2 部グラフ (bipartite graph) $G = (X, Y, E)$ を考える．以下では $|X| = |Y|$ を仮定する．辺集合 $M \subseteq E$ がマッチング (matching) であるとは，M の任意の相異なる 2 辺が端点 (end vertices) を共有しないことである．たとえば以下の図 (a) の 2 部グラフにおけるマッチングの例を図 (b) に太線で示す．



(a) (b)

ある頂点 $v \in X \cup Y$ がマッチング M のある辺の端点であるとき，v は (M によって) マッチされている (v is matched) という．以下の各問に答えよ．

(1) 上の図 (a) のグラフに対するマッチングの中で (b) 以外のものをひとつ示せ．

(2) あるマッチング M に対して M の辺とそうでない辺を交互にたどる単純路 (simple path, すなわち同じ頂点を2度以上通らない路) を交互路 (alternating path) という．たとえば上の図 (b) のマッチングに対しては，$x_4 \to y_3 \to x_3 \to y_2$ がその一例である．また，交互路がその始点（最初の頂点）と終点（最後の頂点）のいずれもマッチされていないとき，増大路 (augmenting path) という．上の図 (b) のマッチングに対する増大路をひとつ求めよ．

(3) 上の問 (2) で求めた増大路に対し，増大路上のマッチングの辺とそうでない辺を入れ換えることにより要素数4のマッチングを作成せよ．

(4) ある $A \subseteq X$ に隣接する (adjacent) 頂点集合を $N(A)$ とする．すなわち $N(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A, (x, y) \in E\}$ である．上の図 (a) における $N(\{x_1, x_2\})$ を答えよ．

(5) 辺数 $|M|$ が最大のマッチングを最大マッチング (maximum matching) といい，とくに $|M| = |X|$ であるとき完全マッチング (perfect matching) という．$|N(A)| < |A|$ であるような集合 $A \subseteq X$ が存在すれば完全マッチングは存在しない理由を簡潔に述べよ．

(6) グラフ G に完全マッチングは存在しないものとし，最大マッチングのひとつを M^* とする．M^* においてマッチされていないある頂点 $\hat{x} \in X$ から (M^* に関する) 交互路によって到達できる X の頂点全ての集合を A, Y の頂点全ての集合を B とする．つまり，$\hat{x}$ から $x \in X$ ($y \in Y$) への交互路が存在するときかつそのときに限り $x \in A$ ($y \in B$) である．なお，$\hat{x} \in A$ であるとする（長さ0の交互路によって到達できると見なす）．このとき，以下の問 (i) (iii) のいずれかひとつに解答せよ．(複数に解答してもよい．その場合は得点の最も高いものを採用する.)

(i) 交互路をそれ以上延ばせないとき極大 (maximal) であるという．$\hat{x}$ から始まる極大な交互路の終点は必ず X の頂点である理由を簡潔に述べよ．

(ii) $|A| > |B|$ であることを示せ．

(iii) $N(A) \subseteq B$ であることを示せ．

問題 4. (数理論理学)

数理論理学は選択問題である．次の **I**, **II** の <u>いずれか一方を選択して</u> 答えよ．解答用紙の指定欄に，どの問題を選択したのかはっきり分かるように記入せよ．

I. 以下の各問に答えよ．

(1) 命題変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ただし $n \geq 2$) に対し次の命題論理式を考える．

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n-1} (x_i \Rightarrow \bigwedge_{j=i+1}^{n} \neg x_j)$$

このとき，以下の問に答えよ．

(i) $n = 3$ の場合を考える．$A(x_1, x_2, x_3)$ を真にする命題変数 x_1, x_2, x_3 への真理値の割り当てを全て列挙せよ．

(ii) $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が真になるためには各命題変数に真理値をどのように割り当てれば良いか．必要十分条件を与えよ．

(iii) (ii) で与えた条件が正しく必要十分条件を与えていることを $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ の要素数に関する帰納法で証明せよ．なお，帰納法の仮定を用いた箇所は明示すること．

(2) 命題変数の有限集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ に対し，X のいずれか一つの命題変数に真を，他の命題変数には偽を割り当てたとき，かつそのときに限り真になる命題論理式 $U(X)$ を与えよ．なお，(1) で与えた A を用いても良い．

(3) $2n$ 人の参加者を n 組の知り合い同士の 2 人組に分ける問題を考える．すなわち，参加者の集合 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2n}\}$ を頂点集合とし，辺集合を $E = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i$ と v_j は知り合いである $\}$ とした単純無向グラフ $\langle V, E\rangle$ を考え，以下の条件を満たす関数 $\phi : V \to \{1, \ldots, n\}$ を探索する問題を考える．

(条件 1) 各 $k \in \{1, \ldots, n\}$ で $\phi(v_i) = k$ となる i は丁度 2 個．

(条件 2) 異なる 2 頂点 v_i, v_j に対し，$\phi(v_i) = \phi(v_j)$ ならば $\{v_i, v_j\} \in E$.

各 $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ と $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対し，$\phi(v_i) = k$ であることを表現する命題変数 x_i^k を用意する．このとき，次の仕様を満たす命題論理式 P を与えよ．なお，(2) で与えた U を用いても良い．

- 条件を満たす関数 ϕ が存在することと P が充足可能であることが必要十分．
- 割り当て σ が P を真にするならば，$\phi(v_i) = k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sigma(x_i^k) =$ 真，で条件を満たす関数 ϕ を定義できる．

II. 以下の各問に答えよ.

(1) 任意の構造 M に対し「M が 1 階述語論理の閉論理式 θ のモデルとなる」ことと「M はちょうど 3 つの要素からなる」が同値になるような閉論理式 θ を挙げよ.

(2) 任意の構造 M に対し「M が 1 階述語論理の閉論理式の集合 Σ のモデルとなる」ことと「M は無限の要素からなる」が同値になるような閉論理式の集合 Σ は存在するか? もし存在するならそのような Σ を挙げよ. また存在しないならその理由を述べよ.

(3) 任意の構造 M に対し「M が 1 階述語論理の閉論理式の集合 Ω のモデルとなる」ことと「M は有限個の要素からなる」が同値になるような閉論理式の集合 Ω は存在するか? もし存在するならそのような Ω を挙げよ. また存在しないならその理由を述べよ.

問題 5. (確率・統計)

a を正の定数 (positive constant) とし, X を開区間 $(0, a)$ 上の一様分布 (uniform distribution) に従う確率変数 (random variable) とする. また Y を開区間 $(0, X)$ 上の一様分布に従う確率変数とする. ただし, 正の実数 c に対して開区間 $(0, c)$ 上の一様分布の確率密度関数 (probability density function) $p(x)$ は

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & 0 < x < c, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる. 以下の各問に答えよ.

(1) X の分散 (variance) を求めよ.

(2) Y の期待値 (expectation) を求めよ.

(3) Y の分布関数 (distribution function) と確率密度関数を求めよ.

(4) Y の観測値として正の実数値 y が得られたとき, a の値を推定する. a の最尤推定値 (maximum likelihood estimate) を求めよ.

問題 6. (量子力学)

2次のエルミート行列 (Hermitian matrices)A, B と長さが1の2項列ベクトル (column vector)ψ に対して，状態 (state)ψ における物理量 (observables)A と B の2乗平均平方根距離 (root-mean-square distance) $d(A, B, \psi)$ を

$$d(A, B, \psi) = \|A\psi - B\psi\|$$

と定義する．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，$d(A, B, \psi)$ の値を求めよ．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$ とする．

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，$d(A, B, \psi)$ の値は単位ベクトル ψ の取り方によらないことを示せ．

(3) A, B が共に固有値 (eigenvalue)± 1 を持つとき，$d(A, B, \psi)$ がとりうる値の集合を求めよ．

問題 7. (アルゴリズム設計)

サイズ $n_1 \times n_2$ のヤング盤 (Young tableau) とは n_1 行 n_2 列の整数行列で，各行で要素が昇順に並び，各列で要素が昇順に並んでいるものをいう．整数はすべて異なるとする．また，∞ を要素として含むことができるものとする．つまり，ヤング盤が含む整数が $n_1 n_2$ 個より少ない場合には欠けている行列要素を ∞ で表すものとする．下の各問に答えよ．

2	5	6	9	14
4	7	11	13	∞
12	15	20	25	∞
17	19	∞	∞	∞

ヤング盤の例

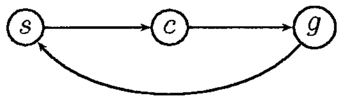
(1) M は任意に与えられた n_1 行 n_2 列の整数行列で要素はすべて異なるとする．M の各行についてそれを昇順にソートし，結果の行列の各列についてそれを昇順にソートすると得られる行列はヤング盤になっていることを示せ．

(2) サイズ $n_1 \times n_2$ のヤング盤 M から最小要素を削除する $O(n_1 + n_2)$ 時間のアルゴリズム DeleteMin(M) を与えよ（削除後の M もヤング盤であること）.（ヒント：M の第1行を除去してできるサイズ $(n_1 - 1) \times n_2$ の部分行列を M' と表記し，M の第1列を除去してできるサイズ $n_1 \times (n_2 - 1)$ の部分行列を M'' と表記して再帰的アルゴリズムを考える.）

(3) 上の DeleteMin(M) を繰り返し用いて整数の集合をソートする $O(n^{1.5})$ 時間のアルゴリズムを構成せよ．ただし，n は入力の整数の個数である．

問題 8. (オートマトン理論)
以下の各問に答えよ．

(1) 次の図に示すスゴロク (board game) を考える．



k 人のプレイヤーは，s 地点にそれぞれ自分のコマ (piece) を置いて開始し，表と裏にそれぞれ 1 と 2 が書かれたコインを順番で投げ，出た数の分だけ自分のコマを動かす．コマがちょうど g 地点で停止するとゲームは終了し，そのプレイヤーの勝ちとする．

以下では，k 人でゲームするときに，ゲーム開始から終了までにコインを投げて出る数字を (プレイヤーとは無関係に) 順に並べて得られる文字列からなるアルファベット $\Sigma = \{1, 2\}$ 上の言語 L^k を考える．

(i) L^1 を認識する決定性有限オートマトン (deterministic finite automata) を図示せよ．また，その正規表現 (regular expression) を求めよ．

(ii) L^2 を認識する決定性有限オートマトンを図示せよ．また，その正規表現を求めよ．

(2) アルファベット $\Gamma = \{a, b\}$ を考える．開始記号を S とし以下の規則で定まる文脈自由文法 (context free grammar) G が表す言語が，言語 $L_1 = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$ と等しいこと，すなわち，$L(G) = L(L_1)$ であることを数学的帰納法 (mathematical induction) を用いて示せ．

$$S \to \varepsilon \mid aSB$$
$$B \to bb$$

問題 9. (プログラミング)

それぞれの重量と価格が分かっているN個の商品から，総重量が定められた上限値`limit`以下となるように任意個選択したときの合計価格のうちで，最大値を計算したい．リスト1は，この計算をするためのC言語プログラムである．構造体`item`は商品を表し，そのメンバ`w`，`p`はそれぞれ重量と価格を表す．N個の商品は配列`items`に格納されている．`maxtotal(num, start)`を呼び出すことにより，総重量に`start`を加えた重量が`limit`以内であるという条件のもとで，インデックスが`num`以降の商品から任意個選択したときの合計価格の最大値が得られる．リスト1の左側の番号は行番号であり，プログラムの一部ではない．このプログラムについて，以下の問いに答えよ．

(1) リスト1の (a) から (e) を埋めてプログラムを完成せよ．

(2) リスト1の33行目が実行された際に10を入力した場合，関数`maxtotal`が呼び出される回数をその理由とともに答えよ．

(3) リスト1の33行目が実行された際に2を入力した場合，関数`maxtotal`が呼び出される回数を理由とともに答えよ．

次に，リスト1のプログラムの高速化を考える．プログラムの高速化を目的とした最適化技法の一つとしてメモ化がある．メモ化は，プログラム中の関数呼び出しの結果を呼び出し時の引数とともに記憶しておき，同じ引数で呼び出された際に再度計算せずに，記憶している値を利用する方法である．リスト2は，配列`memo`を用いてリスト1の関数`maxtotal`にメモ化を適用したものである．以下の問いに答えよ．

(4) リスト2の (f) から (i) を埋めてプログラムを完成せよ．(a) から (e) は (1) で埋めたものと同一である．

(5) リスト2の48行目が実行された際に20を入力したとき，`maxtotal(4, 3)`が呼び出される回数が，リスト2の25行目を行数を変化させずにコメントアウトした場合と比べて何回削減されるかを理由とともに答えよ．

(6) 関数の性質によっては，メモ化は適用できない場合がある．そのような場合を2つ挙げて説明せよ．

専門用語

関数(かんすう)	function	配列(はいれつ)	array
引数(ひきすう)	argument	最適化技法(さいてきかぎほう)	optimization technique
構造体(こうぞうたい)	structured type	メモ化(か)	memoization
メンバ	member	コメントアウト	comment out

リスト1

```
#include <stdio.h>

#define N 4

typedef struct _item {
    int w;
    int p;
} item;

int limit;
item items[N] = {
  {1, 100}, {1, 50}, {2, 150}, {2, 100}
};

int maxtotal(int num, int start) {
  int x, y, rval;
  if (num == N) {
    return 0;
  }

  if ( (a)  >  limit  ) {
    rval = maxtotal(  (b)  ,  (c)  );
  } else {
    x = maxtotal(num + 1,  (d)  ) + items[num].p;
    y = maxtotal(num + 1,  (e)  );
    rval = x > y ? x : y;
  }
  return rval;
}

int main(void) {
  printf("\nWeight limit?:");
  scanf("%d", &limit);
  printf("Maximum total price is %d\n", maxtotal(0, 0));
  return 0;
}
```

リスト2

```
#include <stdio.h>

#define N 6
#define TOTAL_W 15

typedef struct _item {
    int w;
    int p;
} item;

int limit;
item items[N] = {
 {1, 100}, {2, 150}, {1, 50}, {2, 100}, {4, 200}, {5, 250}
};
int memo[N][TOTAL_W];

int maxtotal(int num, int start) {
  int x, y, rval;

  if (num == N) {
    return 0;
  }

  if (memo[num][start] > -1) {
    return  (f)  ;
  }

  if (  (a)  >  limit  ) {
    rval = maxtotal(  (b)  ,  (c)  );
  } else {
    x = maxtotal(num + 1,  (d)  ) + items[num].p;
    y = maxtotal(num + 1,  (e)  );
    rval = x > y ? x : y;
  }
  memo[ (g) ][ (h) ] =  (i)  ;
  return rval;
}

int main(void) {
  int i, j;
```

```
  for (i = 0; i < N; i++) {
    for (j = 0; j < TOTAL_W; j++) {
          memo[i][j] = -1;
    }
  }

  printf("\nWeight limit?:");
  scanf("%d", &limit);
  printf("Maximum total price is %d\n", maxtotal(0, 0));
  return 0;
}
```