平 成 ２ ５ 年 度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学　専攻
入 学 試 験 問 題

<u>専　　　　　門</u>

平成２５年２月７日（木）
１２：３０～１４：００

注 意 事 項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．外国人留学生は、英語での解答可。また、語学辞書(1冊)を持ち込み可。

４．問題冊子、解答用紙２枚、草稿用紙１枚が配布されていることを確認せよ。

５．問題は線形代数、微分積分、離散数学の３科目がある。
このうち<u>２科目を選択して</u>解答せよ。
なお、選択した科目名を解答用紙の指定欄に記入せよ。

６．解答用紙の指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

７．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。
ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記せよ。

８．解答用紙は試験終了後に２枚とも提出せよ。

９．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題 1. (線形代数)
以下の各問に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, 以下の問に答えよ.

(i) A の固有値 (eigenvalue) と固有ベクトル (eigenvector) を求めよ.

(ii) $B^2 = A$ をみたす行列 B は存在しないことを示せ.

(2) 以下の問に答えよ.

(i) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$ を示せ.

(ii) $f(u,v) = u^2 + uv + v^2$ とおくとき, $\begin{vmatrix} f(u_1,v_1) & f(u_1,v_2) & f(u_1,v_3) \\ f(u_2,v_1) & f(u_2,v_2) & f(u_2,v_3) \\ f(u_3,v_1) & f(u_3,v_2) & f(u_3,v_3) \end{vmatrix} = 0$ となるための必要十分条件を求めよ.

問題 2. (微分積分)
以下の各問に答えよ.

(1) $f(x,y) = 4e(e^{x^2-1} - xy) + y^2$ の極値を求めよ.

(2) (i) 次の定積分を計算せよ. ただし a は正実数, k は正整数とする.

$$\int_0^{a^2} (a - \sqrt{x})^k dx$$

(ii) 3 次元空間内の集合

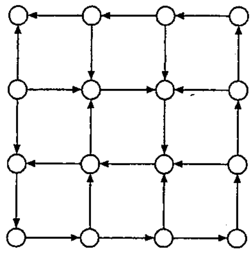
$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \sqrt{\frac{z}{60}} \leq 1,\ x,y,z \geq 0 \right\}$$

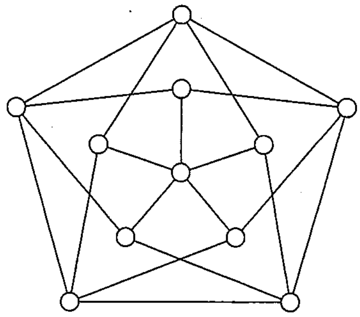
の体積を求めよ.

問題 3.（離散数学）

各問に答えよ．なお，基本用語の定義については本文の最後を参照せよ．

(1) 同じ頂点を 2 度以上通らない路で長さ最大のものを最長路 (longest path) と呼ぶ．次の各グラフに対する最長路を求め，図示せよ．

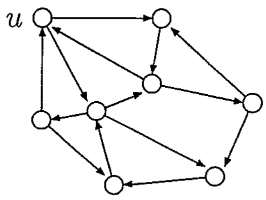




(2) 全ての頂点を丁度 1 回ずつ訪れる閉路をハミルトン閉路 (Hamiltonian circuit) と呼ぶ．ある単純有向グラフ $G=(V,E)$ に対して，有向グラフ $G'=(V',E')$ を以下のように定義する．任意に選んだ 1 つの頂点 $u \in V$ と新たな頂点 $u' \notin V$ に対して，

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{u'\} \\ E' &= \{(v,u') \mid (v,w) \in E, w = u\} \\ &\quad \cup \{(v,w) \mid (v,w) \in E, w \neq u\}. \end{aligned}$$

(i) 次のグラフを G とし，左上の頂点を u として，G' を図示せよ（図にはどの頂点が u と u' であるかを記すこと）．



(ii) 頂点数 2 以上の単純有向グラフ G に対して，以下が成り立つ理由を説明せよ．

G がハミルトン閉路を持つ $\iff$ G' の最長路の長さが $|V'|-1$ である．

(3) 頂点数 3 以上の単純無向グラフ G に対して，

G がハミルトン閉路を持つ $\iff$ G' の最長路の長さが $|V'|-1$ である　　(∗)

となるような無向グラフ G' の作成方法を示せ．また，作成した G' が (∗) を満たす理由を簡潔に説明せよ．

用語の説明　頂点集合 (vertex set) V，辺集合 (edge set) E よりなる有向グラフ (directed graph) $G=(V,E)$ において，V の頂点の列 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ が $(v_i, v_{i+1}) \in E$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ を満たすとき路 (path)，さらに $v_k = v_1$ を満たすとき閉路 (circuit) という．また，路に含まれる辺の数を路の長さ (length) という（たとえば路 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ の長さは $k-1$）．自己ループ (self-loop) や多重辺 (multiple edge) を含まないグラフを単純グラフ (simple graph) という．無向グラフ (undirected graph) についても同様である．