

平成 26 年度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学 専攻
入 学 試 験 問 題

専 門

平成 26 年 2 月 6 日 (木)
12:30~14:00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。
2. 試験終了まで退出できない。
3. 外国人留学生は、英語での解答可。また、語学辞書（1冊）を持ち込み可。
4. 問題冊子、解答用紙 2 枚、草稿用紙 1 枚が配布されていることを確認せよ。
5. 問題は線形代数、微分積分、離散数学の 3 科目がある。
このうち 2 科目を選択して解答せよ。
なお、選択した科目名を解答用紙の指定欄に記入せよ。
6. 解答用紙は指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。
7. 解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。
ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記せよ。
8. 解答用紙は試験終了後に 2 枚とも提出せよ。
9. 問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題 1. (線形代数)

線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ は以下の (I), (II) をみたすものとする.

$$(I) f \text{ は } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ を各々 } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4+k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1+k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ に移す.}$$

$$(II) \text{Ker } f = \{x \mid f(x) = 0\} \text{ の次元は } 1 \text{ である.}$$

このとき, 以下の各問に答えよ.

- (1) k を求めよ.
- (2) $\text{Im } f = \{y \mid \exists x f(x) = y\}$ の基底を求めよ.
- (3) $\text{Im } f$ の直交補空間 $\text{Im } f^\perp = \{x \mid x \text{ は } \text{Im } f \text{ 内のすべてのベクトルと直交}\}$ の直交基底 (基底をなすベクトル同士が互いに直交するような基底) を求めよ.

問題 2. (微分積分)

以下の各問に答えよ.

- (1) 次の曲線上の点 $(3, 3)$ における接線の方程式を求めよ.

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

- (2) 以下の各問に答えよ.

- (i) $x > 0$ のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\left| \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{x^2} \right\}$$

- (ii) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^\infty \left| \sin \frac{1}{x^2} \right| dx \leq 2$$

問題 3. (離散数学)

離散数学は選択問題である。次の I, II のいずれか一方を選択して答えよ。解答用紙の指定欄に、どちらの問題を選択したのかはつきり分かるように記入せよ。

I.

頂点数 n の完全グラフを K_n と記す。その各辺を 2 色のいずれかで塗ったものを 2 辺彩色と呼ぶ。 K_n の 3 頂点からなる部分グラフは、その全ての辺 (3 辺) が同色で塗られているとき単色三角形、そうでない (つまり 3 辺のうち 1 辺が他の 2 辺と異なる色で塗られている) とき混色三角形であるという。以下の各問に答えよ。

- (1) 単色三角形を含まないような K_5 の 2 辺彩色が存在することを示せ。
- (2) 任意の 2 辺彩色に対して、 K_6 は少なくとも 1 つの単色三角形を含むことを示せ。
- (3) 任意の 2 辺彩色に対して、 K_6 に含まれる混色三角形の個数は高々 18 であることを示せ。

II.

要素数 n の集合 X に対して、 X からそれ自身への全単射全体の集合を S_n とおく。以下の各問に答えよ。

- (1) S_n は写像の合成 \circ に関して群になることを示せ。
- (2) S_n の位数を求めよ。
- (3) S_n の任意の互換 σ と要素 τ に対して、 $\tau^{-1}\sigma\tau$ は互換であることを示せ。
- (4) S_3 の部分群をすべて求めよ。
- (5) S_5 の要素の位数の最大値を求めよ。さらに、最大値を与える要素の個数を求めよ。