平 成 ２７ 年 度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入 学 試 験 問 題

専　　　門

平成２７年２月９日（月）
１２：３０～１４：００

注 意 事 項

1．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

2．試験終了まで退出できない。

3．外国人留学生は、英語で解答してもよい。さらに、電子辞書以外の辞書（1冊）を持ち込んでもよい。

4．問題冊子、解答用紙２枚、草稿用紙１枚が配布されていることを確認せよ。

5．問題は、線形代数、微分積分、離散数学の３題からなる。
このうち<u>２題を選択して</u>解答せよ。
選択した問題名または問題番号を解答用紙の指定欄に記入せよ。

ただし、<u>離散数学は選択問題であり、問題はIとIIからなる。離散数学を選択する場合は、IまたはIIの一方のみを答えよ</u>。

6．全ての解答用紙の指定欄に受験番号を必ず記入せよ。
解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

7．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。
ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

8．解答用紙は試験終了後に２枚とも提出せよ。

9．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ること。

問題 1. (線形代数)

以下の各問に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & a+1 & a+1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 (eigenvalue) と固有ベクトル (eigenvector) を求めよ．

(2) $a = 2$ のとき，A^{100} を求めよ．

問題 2. (微分積分)

以下の各問に答えよ．

(1) n を 2 以上の整数 (integer) とするとき，

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x} - x}$$

を求めよ．

(2) 曲線 (curve) $y^2 = x^3 - 2x$ のグラフの概形を描け．またこの曲線上で原点 (origin) からの距離 (distance) が極値 (extreme value) をとる点をすべて求めよ．

問題 3. (離散数学)

離散数学は選択問題である. 次の I, II の**いずれか一つを選択して**答えよ. 解答用紙の指定欄に, どちらの問題を選択したのかはっきりわかるように記入せよ.

I.

以下の各問に答えよ.

(1) $(13^{23}-1)(13^{23}+1)$ は 47 の倍数 (multiple) であることを示せ.

(2) 45 は 47 の原始根 (primitive root) であることを示せ.

(3) 47 の残りの原始根をすべて求めよ.

(4) p を奇素数 (odd prime), g を p の原始根とする. p と互いに素 (coprime) な a に対して, $a \equiv g^m \mod p$ と表したとき, 以下の問に答えよ.

(i) m の奇偶性 (parity) は g の選び方に依存しないことを証明せよ.

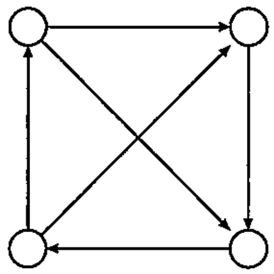
(ii) $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^m \mod p$ を証明せよ.

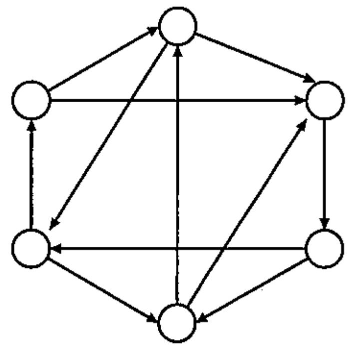
(5) $13^{23}-1$ と $13^{23}+1$ のうち, 47 の倍数になるのはどちらであるか判定せよ.

II.

グラフの各頂点を $1, 2, \ldots, k$ のいずれかの色で塗ったものを頂点 k 彩色と呼ぶ．以下の各問に答えよ．

(1) 有向グラフの頂点 k 彩色において，1 から k のどの色についても，その色で塗られている頂点すべての集合が誘導する部分グラフが有向閉路を含まないとき，「無閉路 k 彩色」と呼ぶことにする．以下の各グラフに対し，k ができるだけ小さい無閉路 k 彩色を示せ．





(2) 無向グラフの頂点 k 彩色において，どの辺についてもその両端点が異なる色で塗られているとき，「無衝突 k 彩色」と呼ぶことにする．頂点集合 V, 辺集合 E をもつ無向グラフ $U = (V, E)$ と整数 k が与えられたとき，U に無衝突 k 彩色が存在するか否かを判定する問題と，頂点集合 V, 辺集合 A をもつ有向グラフ $D = (V, A)$ に対する無閉路 k 彩色の存在を判定する問題を考える．有向グラフの無閉路 k 彩色の存在判定問題が，無向グラフの無衝突 k 彩色の存在判定問題と同等以上の難しさを持つことを示したい．任意の無向グラフ $U = (V, E)$ と正整数 k に対し，

無向グラフ $U = (V, E)$ が無衝突 k 彩色を持つ
$\iff$ 有向グラフ $D = (V, A)$ が無閉路 k 彩色を持つ

を満たす $D = (V, A)$ の作り方を示せ（U の頂点集合と D の頂点集合が同じであることに注意せよ）．

注. 有向グラフ $D = (V, A)$ に対し，頂点集合 $S \subseteq V$ が誘導する部分グラフ $(\tilde{V}, \tilde{A})$ とは，頂点集合 S と両端点が S に属する D の辺のすべてからなる部分グラフである．すなわち，$\tilde{V} = S$, $\tilde{A} = \{(u, v) \in A \mid u \in S \text{ かつ } v \in S\}$.

用語の英訳. 有向グラフ: directed graph, 無向グラフ: undirected graph, 頂点: vertex, 辺: edge, 閉路: cycle, 端点: end vertex, S が誘導する部分グラフ: subgraph induced by S