学位報告4

報告番号	※　乙　第　　　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　A Study of the Biclique Edge Partition and Cover Problems
（2部クリーク辺被覆問題および2部クリーク辺分割問題の研究）

氏　　名　大月　英明

論　文　内　容　の　要　旨

本論文は，2部グラフの辺集合に対する2部クリーク辺分割問題，および2部クリーク辺被覆問題についての研究である．2部クリーク辺分割問題とは，与えられたグラフのすべての辺からなる集合を分割する最小2部クリーク集合を求める問題であり，2部クリーク辺被覆問題とは，与えられたグラフのすべての辺からなる集合を被覆する最小2部クリーク集合を求める問題である．

2部クリーク辺分割問題はNP困難問題であることが知られている．しかし近似の困難さに関しての研究結果は少ない．本論文では，2部クリーク辺分割問題の近似比率に対して，ひとつの下界を与える．具体的には，P=NPでない限り，2部クリーク辺分割問題の6053/6052より良い近似比率をもつ多項式時間近似アルゴリズムは存在しないことを示す．この近似困難性を得るために，充足可能性問題から2部クリーク辺分割問題へのギャップ保存帰着を構成する．

2部クリーク辺被覆問題もNP困難であることが知られているが，ある制限されたグラフクラスに対しては多項式時間アルゴリズムが与えられている．1996年に，C_4フリー2部グラフと距離遺伝2部グラフに対して多項式時間アルゴリズムが与えられた．さらに1999年には，これら2つのグラフクラスを真に含むドミノフリー2部グラフに対して多項式時間アルゴリズムが与えられた．本論文では，新しいグラフクラスに対して多項式時間アルゴリズムを提案する．具体的には，まず与えられた2部グラフ B に対して修正ガロア束 Gm(B) を定義する．Gm(B) の上で，あるパラメータ R(B)を定義し，B がドミノフリー2部グラフであるとき，そしてそのときに限り $R(B) = 0$ であることを示す．$R(B) \leqq 1$ で定義されるグラフクラスはドミノフリー2部グラフを真に含む．このグラフクラスに対し多項式時間アルゴリズムを与える．更に，B がドミノフリー2部グラフであれば，修正ガロア束 Gm(B)のサイズは $O(nm)$であることを示し，更に $R(B) = O(1)$ のグラフに対し，Gm(B)のサイズは $O(n + m)$ であることを示す．ただし n と m はそれぞれ B の頂点数と辺数である．この結果は，本論文で与えるアルゴリズムの計算時間を改善する．

本論文は以下の構成である．第 1 章は本研究の導入である．最初に，2 部グラフは現実世界の問題のモデル化に用いられることを述べる．そのような例として，データマイニングにおける「顧客と商品」，または「単語と文書」など，互いに素な集合間の関係が 2 部グラフで自然にモデル化できることを説明する．このような応用例では，与えられた 2 部グラフを 2 部クリークで分割，もしくは被覆することが要求されることが多い．この章ではまず，そのような要求を満たす問題は，2 部クリーク辺分割問題もしくは 2 部クリーク辺被覆問題として定式化できることを述べる．その応用例の一つとして，マーケットバスケット分析の例を取り上げて概略を述べる．次に，NP 困難問題に対する近似アルゴリズム研究の背景を概観する．まず PCP 定理を紹介し，2 部クリーク辺分割問題の近似不可能性を得るために用いたギャップ保存帰着の手法について解説する．次に，2 部クリーク辺被覆問題に対する多項式時間アルゴリズムの先行研究を紹介する．この問題に対して，多項式時間アルゴリズムが存在する新しいグラフクラスに関して説明する．

第 2 章では本研究を述べるのに必要な用語の導入と，諸定義を述べる．この章ではまず，計算複雑性のクラス P ，NP などを定義するために，言語，チューリング機械などを定義する．次に，この論文で用いられるグラフ理論の用語を定義し，この論文で触れるいくつかのグラフ理論の問題を定義する．次に，計算複雑性の理論に重要な役割を持つ，充足可能性問題について説明する．さらに，近似困難性の理論を大きく発展させた PCP 定理の説明をする．PCP 定理は対話証明系を用いた NP の特徴づけである．PCP 定理の最初の証明は，符号理論などを用いた複雑なものであるが，ここでは，近年与えられた，制約グラフを用いた PCP 定理の別証明を概観する．次に，NP 困難問題に対するアルゴリズムの近似比率の定義をする．最後に， 2 部クリーク辺分割問題と 2 部クリーク辺被覆問題が多項式時間で解けるグラフクラスについて述べる．

第 3 章では，2 部クリーク辺分割問題の近似比率に対し，ひとつの下界を与える．具体的には，P=NP でない限り，2 部クリーク辺分割問題は 6053/6052 より良い近似解を多項式時間で得ることは出来ないことを証明する．この章では，NP 困難問題である 3-OCC-MAX-2-SAT から 2 部クリーク辺分割問題への近似保存帰着（ギャップ保存帰着）を構成する．3-OCC-MAX-2-SAT は充足可能性問題のひとつである．この 3-OCC-MAX-2-SAT に関しては，先行研究により，任意の正のϵ（<1/2）に対し，$(2012-\epsilon)$N 個以上の節を充足できる問題例と，$(2011+\epsilon)$N 個以下の節しか充足できない問題例とを区別することは NP 困難であることが証明されている．ただし，N は自然数である．この章では，この結果を用い，もし 2 部クリーク辺分割問題が 6053/6052 より良い近似比率の近似アルゴリズムが存在するならば，上述の 3-OCC-MAX-2-SAT の 2 つの問題例が区別可能であることを証明する．すなわち P≠NP の仮定の下では，2 部クリーク辺分割問題の 6053/6052 より良い近似比率をもつ近似アルゴリズムは存在しないことを証明する．このことから直ちに 2 部クリーク辺分割問題は多項式時間近似スキーム (PTAS) を持たないこともわかる．

第 4 章では 2 部クリーク辺被覆問題が多項式時間で解ける新しいグラフクラスを提案する．ドミノフリー 2 部グラフに対しては，この問題が多項式時間で解けることが知られている．本章で提案するグラフクラスはドミノフリー 2 部グラフを真に含む．この結果を与えるために，まず，入力の 2 部グラフ B に対して修正ガロア束 Gm(B) を導入する．Gm(B) は， B の極大 2 部グラフと B の頂点を中心とする極大星グラフの集合を，頂点集合とみなした有向グラフである．Gm(B) の辺は，これらの頂点の間のある半順序によって定義され，Gm(B) はこの半順序に基づいて構成されたハッセ図になる．Gm(B) は先行研究において構成されたガロア束 G(B) といくつか異なる点を持つ．まず，G(B) はドミノフリー2 部グラフ B に対して定義されるが，

Gm(B) は一般の 2 部グラフ B に対して定義される．また，必ずしも極大 2 部クリークではない星グラフを頂点に持つ．さらに，ガロア束 G(B) の構成には，グラフの単純化の手順が必要であるが， Gm(B) の構成においてはそのような手順は必要ではない．この Gm(B) の構成の後，Gm(B) の持つ性質について述べる． B がドミノフリー 2 部グラフであれば，Gm(B) は，G(B) と同様の性質を持つ．具体的には B のそれぞれの辺は，Gm(B) における路に一意に対応する．この性質を用い， B の 2 部クリーク分割のサイズ，2 部クリーク被覆のサイズ，さらに Gm(B) のカットのサイズは等しいことが証明できる．次に Gm(B) 上で定義される重複パラメータ R(B) を導入する．ここでは， B がドミノフリー 2 部グラフのとき，そしてそのときに限り $R(B) = 0$ であることが示される．次に $R(B) \leqq 1$ であるグラフ B のもつ性質について述べる．グラフ B を $R(B) \leqq 1$ を満たすグラフとする．B は必ずしもドミノフリー 2 部グラフではない．このとき B の 2 部クリーク辺被覆は， Gm(B) のカットになっていることを証明する．Gm(B) の最小カットは多項式時間で求めることができることから，グラフ B に対する 2 部クリーク辺被覆問題は多項式時間で解けることになる．すなわち $R(B) \leqq 1$ で定義されるグラフクラスに対して，2 部クリーク辺被覆問題の多項式時間アルゴリズムが存在することが示される． $R(B) \leqq 1$ で定義されるグラフクラスはドミノフリー 2 部グラフを真に含むことから，この結果は 2 部クリーク辺被覆問題が多項式時間で解けるグラフクラスを拡張したと言える．

第 5 章は修正ガロア束 Gm(B) のサイズ（頂点数）についての考察である．一般の 2 部グラフに対して，Gm(B) のサイズは B の頂点数 n の指数関数で増加する可能性がある．このようなグラフに対しては，前章で提案したアルゴリズムでは 2 部クリーク被覆問題を多項式時間で解くことは不可能である．この章では，グラフクラスを限ると Gm(B) のサイズが n の多項式で抑えられることを示す．まず B が距離遺伝 2 部グラフの場合, Gm(B) のサイズが $2n + 1$ 以下であることを示す．この証明には，距離遺伝 2 部グラフ B には bisimplical edge が存在するという性質が用いられる．次に一般の 2 部グラフの場合，Gm(B) のサイズは $(R(B)/2 + 1)n + m + 2$ 以下であることを示す．ここで， m は B の辺数である．このことから，R(B) が $O(1)$ のグラフに対して，Gm(B) のサイズは $O(n + m)$ であることが示される．この結果は，$R(B) \leqq 1$ のグラフクラスに対して, 2 部クリーク被覆問題の解が n と m の多項式時間で得られることを意味する．

第 6 章では本論文の総括であり，今後の課題として，2 部クリーク被覆問題，分割問題の計算時間の改善や，多項式時間でこれらの問題が解けるグラフクラスの拡張ができるかどうか，などの課題があることを述べる．

38字×23行